ಕರ್ನಾಟಕ ಸರ್ಕಾರ

ಗಣಿತ

10

ಹತ್ತನೆಯ ತರಗತಿ

ಭಾಗ – ೧

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸಂಶೋಧನೆ ಮತ್ತು ತರಬೇತಿ ಸಂಸ್ಥೆ
ಶ್ರೀ ಅರಬಿಂದೋ ಮಾರ್ಗ ನವದೆಹಲಿ 110016

ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
100 ಅಡಿ ವರ್ತುಲ ರಸ್ತೆ, ಬನಶಂಕರಿ 3ನೆಯ ಹಂತ,
ಬೆಂಗಳೂರು – 560085

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisors for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi and Professor G.P. Dikshit (Retd.) of Lucknow University, Lucknow for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

New Delhi
15 November 2006

Director
National Council of Educational
Research and Training

Textbook Development Committee

Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

Chief Advisors

P. Sinclair, Professor of Mathematics, IGNOU, New Delhi

G.P. Dikshit, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Chief Coordinator

Hukum Singh, Professor and Head (Retd.), DESM, NCERT, New Delhi

Members

Anjali Lal, PGT, DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

A.K. Wazalwar, Professor and Head, DESM, NCERT

B.S. Upadhyaya, Professor, RIE, Mysore

Jayanti Datta, PGT, Salwan Public School, Gurgaon

Mahendra Shanker, Lecturer (S.G.) (Retd.), NCERT

Manica Aggarwal, Green Park, New Delhi

N.D. Shukla, Professor (Retd.), Lucknow University, Lucknow

Ram Avtar, Professor (Retd.) & Consultant, DESM, NCERT

Rama Balaji, TGT, K.V., MEG & Centre, St. John's Road, Bangalore

S. Jagdeeshan, Teacher and Member, Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S.K.S. Gautam, Professor (Retd.), DESM, NCERT

Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri District Centre, Delhi

V.A. Sujatha, TGT, Kendriya Vidyalaya No. 1, Vasco, Goa

V. Madhavi, TGT, Sanskriti School, Chankyapuri, New Delhi

Member-coordinator

R.P. Maurya, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop:

Mala Mani, TGT, Amity International School, Sector-44, Noida; Meera Mahadevan, TGT, Atomic Energy Central School, No. 4, Anushakti Nagar, Mumbai; Rashmi Rana, TGT, D.A.V. Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi; Mohammad Qasim, TGT, Anglo Arabic Senior Secondary School, Ajmeri Gate, Delhi; S.C. Rauto, TGT, Central School for Tibetans, Happy Valley, Mussoorie; Rakesh Kaushik, TGT, Sainik School, Kunjpura, Karnal; Ashok Kumar Gupta, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Dudhnoi, Distt. Goalpara; Sankar Misra, TGT, Demonstration Multipurpose School, RIE, Bhubaneswar; Uaday Singh, Lecturer, Department of Mathematics, B.H.U., Varanasi; B.R. Handa, Emeritus Professor, IIT, New Delhi; Monika Singh, Lecturer, Sri Ram College (University of Delhi), Lajpat Nagar,

New Delhi; G. Sri Hari Babu, TGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Sirpur, Kagaz Nagar, Adilabad; Ajay Kumar Singh, TGT, Ramjas Sr. Secondary School No. 3, Chandni Chowk, Delhi; Mukesh Kumar Agrawal, TGT, S.S.A.P.G.B.S.S. School, Sector-V, Dr Ambedkar Nagar, New Delhi.

Special thanks are due to Professor Hukum Singh, Head (Retd.), DESM, NCERT for his support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station; Purnendu Kumar Barik, Copy Editor; Naresh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators; Yogita Sharma, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

ಮುನ್ನುಡಿ

2005ನೇ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ ಆಧರಿಸಿ ರಚಿತವಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯವಸ್ತುವಿನಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿರುವ 10ನೇ ತರಗತಿ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಗಣಿತ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ ಭಾಷೆಗೆ ಯಥಾವತ್ತಾಗಿ ಅನುವಾದಿಸಿ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ 2018–19 ನೇ ಸಾಲಿನಿಂದ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಆಂಗ್ಲ ಮಾಧ್ಯಮದ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಂಗ್ಲೀಷ್, ಹಿಂದಿ ಮತ್ತು ಉರ್ದು ಮಾಧ್ಯಮದ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಪಡೆದು ಭಾಗ–1 ಮತ್ತು ಭಾಗ–2 ಎಂಬುದಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ಜಾರಿಗೊಳಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಈ ಪುಸ್ತಕವು 2005 ರ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದ ಎಲ್ಲಾ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. 10ನೇ ತರಗತಿಯ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಅಂತರ್ಗತ ವಿಧಾನ (Integrated Approach), ರಚನಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ (Constructive Approach) ಹಾಗೂ ಸುರುಳಿಯಾಕಾರದ ವಿಧಾನ (Spiral Approach) ಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ವಿಷಯ ಹಾಗೂ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಚಿಂತನಾಶೀಲರನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ, ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. ಪಠ್ಯ ವಸ್ತುಗಳೊಂದಿಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕ ಜೀವನ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಅಂತರ್ಗತವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪುಸ್ತಕಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ರಚಿತವಾಗಿಲ್ಲ ಬದಲಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸರ್ವಾಂಗೀಣ ವ್ಯಕ್ತಿತ್ವ ವಿಕಸನಕ್ಕೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ನಿತ್ಯಜೀವನದಲ್ಲಿ ಗಣಿತವು ಎಲ್ಲಾ ಹಂತಗಳಲ್ಲೂ ಅತ್ಯಾವಶ್ಯಕವಾಗಿದೆ. ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಪಠ್ಯಕ್ರಮ–2005 ರಂತೆ ಗಣಿತವು ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಸಿದ್ಧಾಂತಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ, ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ, ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಜೊತೆಗೆ ಗಣಿತವನ್ನು ಜೀವನದ ಸಕಲ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲೂ ಬಳಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡು ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸುಗಳಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಲು ಸಹಕಾರಿ ಕಲಿಕೆಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾಚೀನ ಭಾರತದ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತ ಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ಶೈಕ್ಷಣಿಕವಾಗಿ ವೈಶಿಷ್ಟ್ಯಪೂರ್ಣವಾಗಿವೆ. ಇತರೆ ವಿಷಯಗಳ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳಂತೆ ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹಾಗೂ ಕೌಶಲ್ಯಗಳನ್ನು ಬೆಳೆಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತವೆ.

ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಶೈಕ್ಷಣಿಕ ಸುಧಾರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಂಡು ಕರ್ನಾಟಕ ರಾಜ್ಯದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೂ ಸಹ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ಮಟ್ಟದ ಸ್ಪರ್ಧಾತ್ಮಕ ಪರೀಕ್ಷೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಶಸ್ಸನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಈ

ಪುಸ್ತಕ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಲಿ ಎಂಬುದೇ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಶಿಕ್ಷಣ ಇಲಾಖೆಯ ಪ್ರಮುಖ ಆಶಯವಾಗಿದೆ.

ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಪ್ರಕಟಿಸಿರುವ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ದಿಟ್ಟ ನಿರ್ಧಾರವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಸಹಕರಿಸಿದ ಸರ್ಕಾರ ಮತ್ತು ಇಲಾಖೆಯ ಉನ್ನತ ಅಧಿಕಾರಿಗಳಿಗೆ ಆಭಾರಿಯಾಗಿದ್ದೇನೆ. ಈ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕವನ್ನು ನಮ್ಮ ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಜಾರಿಗೆ ತರಲು ಸಕಾಲದಲ್ಲಿ ಅನುಮತಿ ನೀಡಿ ಸಹಕರಿಸಿದ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಯ ಪ್ರಕಾಶನ ವಿಭಾಗ ಹಾಗೂ ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ ಸಂಸ್ಥೆ ಎಲ್ಲ ಅಧಿಕಾರಿ ಸಿಬ್ಬಂದಿಗಳಿಗೆ ಇಲಾಖೆ ತನ್ನ ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ರಾಜ್ಯದಲ್ಲಿ, ಈ ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಕನ್ನಡ, ಮರಾಠಿ, ತೆಲುಗು ಮತ್ತು ತಮಿಳು ಮಾಧ್ಯಮಗಳಿಗೆ ಭಾಷಾಂತರಿಸಿದ ಎಲ್ಲ ಸಂಪನ್ಮೂಲ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳಿಗೆ, ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜನೆ ಮಾಡಿದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಾಧಿಕಾರಿಗೆ, ಸುಂದರವಾಗಿ ಡಿಟಿಪಿ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿರುವ ಡಿಟಿಪಿ ಆಪರೇಟರ್ ಗಳು ಹಾಗೂ ಸಂಸ್ಥೆಗೆ, ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಮುದ್ರಿಸಿ ವಿತರಿಸಿರುವ ಮುದ್ರಕರುಗಳಿಗೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘವು ಹೃತ್ಪೂರ್ವಕ ಕೃತಜ್ಞತೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಪಿಸುತ್ತದೆ.

ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ಹೆಚ್.ಎನ್.
ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು
ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ (ರಿ)
ಬೆಂಗಳೂರು – 85

ಕನ್ನಡ ಭಾಷಾಂತರ ಸಮಿತಿ

1. **ಶ್ರೀ. ಟಿ.ಕೆ. ಪ್ರಸನ್ನಮೂರ್ತಿ,** B.Sc. B.Ed, ನಿವೃತ್ತ ಮುಖ್ಯ ಶಿಕ್ಷಕರು ವಿಜಯ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಜಯನಗರ, ಬೆಂಗಳೂರು ದಕ್ಷಿಣ ಜಿಲ್ಲೆ.
2. **ಶ್ರೀ. ಸದಾಶಿವ ಪೂಜಾರಿ,** M.Sc. BEd, ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಎಸ್.ಡಿ.ಎಮ್ ಅನುದಾನಿತ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಉಜಿರೆ, ಬೆಳ್ತಂಗಡಿ ತಾಲ್ಲೂಕು, ದಕ್ಷಿಣಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ.
3. **ಶ್ರೀ. ಸದಾನಂದ ಕುಮಾರ್ ಜಿ.ವಿ.,** M.Sc. B.Ed, ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಬಾಲಕಿಯರ ಕಾಲೇಜು, ಹಂಪಿ ರೋಡ್ ಹೊಸಪೇಟೆ, ಬಳ್ಳಾರಿ ಜಿಲ್ಲೆ.
4. **ಶ್ರೀ. ಎಂ. ಶರತ್ ಕುಮಾರ್,** ತುಳುಪುಳೆ, M.Sc. B.Ed, ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು ಸರ್ಕಾರಿ ಪದವಿ ಪೂರ್ವ ಕಾಲೇಜು (ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿಭಾಗ). ವೇಣೂರು, ಬೆಳ್ತಂಗಡಿ ತಾಲ್ಲೂಕು, ದಕ್ಷಿಣಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ.
5. **ಶ್ರೀ. ಅನಿಲ್ ಕುಮಾರ್ ಸಿ.ಎನ್,** M.Sc. M.Ed ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ ಅರಳಾಳುಸಂದ್ರ, ಬಿಡದಿ ಹೋಬಳಿ, ರಾಮನಗರ ತಾಲ್ಲೂಕು ಮತ್ತು ಜಿಲ್ಲೆ
6. **ಶ್ರೀಮತಿ. ವೀಣಾ ಗಣಪತಿ ಶ್ಯಾನಭಾಗ ಕಡತೋಕಾ,** M.Sc. B.Ed, ಸಹಶಿಕ್ಷಕರು, ಸರ್ಕಾರಿ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಹಳೇಪೇಟೆ, ಉಜಿರೆ, ಬೆಳ್ತಂಗಡಿ ತಾಲ್ಲೂಕು, ದಕ್ಷಿಣಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ.
7. **ಶ್ರೀಮತಿ. ವಿನಯ ಕುಮಾರಿ ವೈ.,** M.Sc. M.Ed, ಸಹ ಶಿಕ್ಷಕರು, ಅನುದಾನಿತ ಭಾರತ್ ಪ್ರೌಢಶಾಲೆ, ಉಳ್ಳಾಲ, ಮಂಗಳೂರು, ದಕ್ಷಿಣಕನ್ನಡ ಜಿಲ್ಲೆ.

ಸಲಹೆ ಮತ್ತು ಮಾರ್ಗದರ್ಶನ

ಶ್ರೀ. **ಗೋಪಾಲಕೃಷ್ಣ ಹೆಚ್.ಎನ್**. – ವ್ಯವಸ್ಥಾಪಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು–85.

ಶ್ರೀ. **ಕೆ.ಜಿ. ರಂಗಯ್ಯ**. – ಉಪನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು–85

ಕಾರ್ಯಕ್ರಮ ಸಂಯೋಜಕರು

ಶ್ರೀಮತಿ. ಜಯಲಕ್ಷ್ಮೀ ಚಿಕ್ಕನಕೋಟೆ – ಸಹಾಯಕ ನಿರ್ದೇಶಕರು, ಕರ್ನಾಟಕ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕ ಸಂಘ, ಬೆಂಗಳೂರು–85

ಪರಿವಿಡಿ

ಭಾಗ – ೧

3H9QHK

3WILJ8

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು 1

1.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಸೂರ್ಯಕಾಂತಿ ಹೂವಿನ ದಳಗಳು, ಜೇನು ಗೂಡಿನ ರಂಧ್ರಗಳು, ಜೋಳದ ತೆನೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಾಳುಗಳು, ಅನನಾಸಿನ ಸುರುಳಿಗಳು, ದೇವದಾರು ಮರದ ಹಣ್ಣುಗಳು ಹೀಗೆ ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹಲವು ವಸ್ತುಗಳು ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿದ್ದಿರಿ.

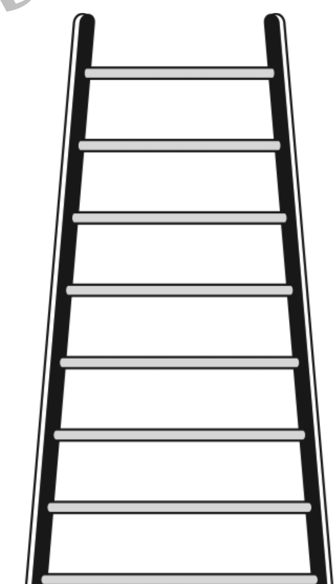
ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬರುವ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ನಾವೀಗ ಗಮನಿಸೋಣ. ಅಂತಹ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

i) ರೀನಾ ಉದ್ಯೋಗವೊಂದಕ್ಕೆ ಅರ್ಜಿ ಸಲ್ಲಿಸುವ ಮೂಲಕ ಆಯ್ಕೆಯಾದಳು. ಅವಳಿಗೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 8000 ಸಂಬಳ ಇರುವ ಹಾಗೂ ₹ 500 ವಾರ್ಷಿಕ ಬಡ್ತಿ ಇರುವ ಕೆಲಸ ದೊರೆಯಿತು. ಅವಳ ಸಂಬಳವು 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ ..... ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)

8000, 8500, 9000 .... ಆಗಿದೆ.

ii) ಏಣಿಯ ಪಾದದ ಅಳತೆಗಳು ಕೆಳಗಿನಿಂದ ಮೇಲಕ್ಕೆ ಹೋದಂತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ 2cm ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 1.1ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಕೆಳಭಾಗದ ಪಾದದ ಉದ್ದ 45cm. ಅಳತೆ cm ಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವಂತೆ ಕೆಳಭಾಗದಿಂದ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ ಇರುವ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ ..... 8ನೇ ಪಾದಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31

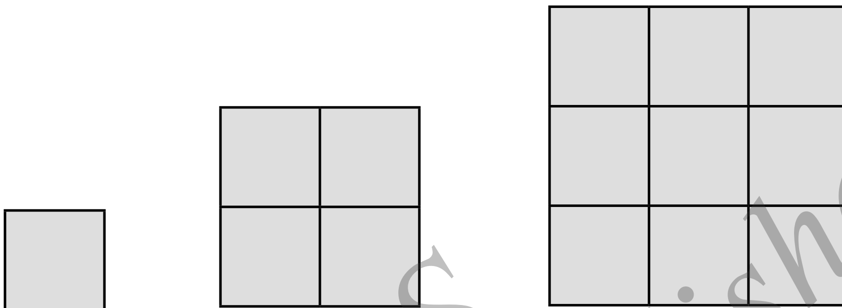


ಚಿತ್ರ 1.1

iii) ಒಂದು ಉಳಿತಾಯ ಯೋಜನೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಮೊತ್ತವು ಪ್ರತಿ 3 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಅದರ $\frac{5}{4}$ ಪಟ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ₹ 8000ಗಳ ಠೇವಣಿಯ 3, 6, 9 ಮತ್ತು 12 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಅವಧಿ ಪೂರ್ಣ ಮೊತ್ತವು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) 10000, 12500, 15625, 19531.25 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

iv) 1, 2, 3 ..... ಏಕಮಾನ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಗಳಲ್ಲಿರುವ ಏಕಮಾನ ಅಳತೆ ಹೊಂದಿರುವ ವರ್ಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ (ಚಿತ್ರ 1.2 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ)

$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ ....$



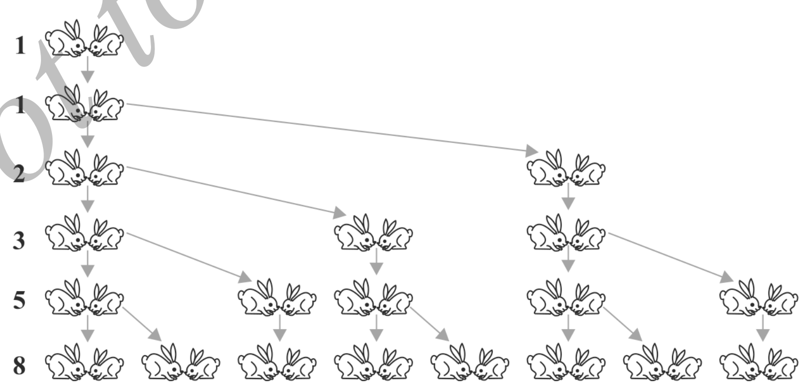
ಚಿತ್ರ 1.2

v) ಶಕೀಲಾ ತನ್ನ ಮಗಳು 1 ವರ್ಷ ಇರುವಾಗ ಅವಳ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ ₹ 100 ಹಾಕಿದಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಈ ಹಣವನ್ನು ₹ 50 ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾ ಹೋದಳು. ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ, 4ನೇ...... ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಮೊತ್ತವು ಕ್ರಮವಾಗಿ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)

100, 150, 200, 250 ...... ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

vi) ಮೊದಲನೇ ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಮೊಲಗಳ ಜೋಡಿಯೊಂದು ಸೂಕ್ತ ವಯಸ್ಕವಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಮರಿಗಳಿಗೆ ಜನ್ಮ ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ನಂತರದ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಅವುಗಳು ಹೊಸ ಜೋಡಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಜನ್ಮ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಹೊಸ ಜೋಡಿಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2ನೇ ಮತ್ತು ನಂತರದ ತಿಂಗಳುಗಳಲ್ಲಿ ಹೊಸ ಜೋಡಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಜನ್ಮ ನೀಡುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 1.3 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಯಾವ ಮೊಲಗಳೂ ಸಾಯುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ .... 6ನೇ ತಿಂಗಳುಗಳ ಆರಂಭದಲ್ಲಿರುವ ಜೋಡಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ:

1, 1, 2, 3, 5, 8



ಚಿತ್ರ 1.3

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆದರೆ, ಮತ್ತೆ ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ, ಮತ್ತೊಂದರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವರ್ಗಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಇತ್ಯಾದಿ ಎಂದು ನಾವು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಪದಗಳಿಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಠ ಪದವನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರ ಮುಖಾಂತರ ಮುಂದಿನ ಪದಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿನ್ಯಾಸದ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸೋಣ ಹಾಗೂ ಅವುಗಳ nನೇ ಪದ ಮತ್ತು n ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮತ್ತು ನಿತ್ಯ ಜೀವನದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಈ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

1.2 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ:

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ:

i) 1, 2, 3, 4 ....

ii) 100, 70, 40, 10 ....

iii) –3, –2, –1, 0 ....

iv) 3, 3, 3, 3 ......

v) –1, 0, –1.5, –2.0, –2.5 ....

ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪದವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದ ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಹುದೇ? ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿದ್ದಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಬರೆಯುವಿರಿ? ಬಹುಷಃ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸ ಅಥವಾ ನಿಯಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುವುದರಿಂದ ಸಾಧ್ಯ. ನಾವೀಗ ಅದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ನಿಯಮವನ್ನು ಬರೆಯೋಣ.

i) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕಿಂತ 1 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ.

ii) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕಿಂತ 30 ಕಡಿಮೆ ಇದೆ.

iii) ರಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

iv) ರಲ್ಲಿ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳು 3 ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 0 ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ (ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ) ಪಡೆಯಬಹುದು.

v) ರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ –0.5 ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ (ಅಂದರೆ 0.5ನ್ನು ಕಳೆಯುವುದರಿಂದ) ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಪಟ್ಟಿಗಳಲ್ಲಿ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಅನುಕ್ರಮ ಪದ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಅದರ ಹಿಂದಿನ

ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯೇ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ.

ಆ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಧನ, ಋಣ ಅಥವಾ ಶೂನ್ಯ ಆಗಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a_1, ಎರಡನೇ ಪದ a_2 .... nನೇ ಪದ a_n, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ a_n$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = a_n - a_{n-1} = d$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗೆ ಇನ್ನು ಹಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

a) ಬೆಳಗಿನ ಪ್ರಾರ್ಥನೆಗೆ ಸಾಲಾಗಿ ನಿಲ್ಲುವ ಶಾಲೆಯೊಂದರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಎತ್ತರಗಳು (cm ಗಳಲ್ಲಿ) 147, 148, 149 .... 157.

b) ಒಂದು ಪಟ್ಟಣದ ಜನವರಿ ತಿಂಗಳ ವಾರವೊಂದರಲ್ಲಿ ದಾಖಲಾದ ಕನಿಷ್ಠ ಉಷ್ಣತೆ (ಡಿಗ್ರಿ ಸೆಲ್ಸಿಯಸ್‌ನಲ್ಲಿ)ಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆದಾಗ

–3.1, –3.0, –2.9, –2.8, –2.7, –2.6, –2.5.

c) ಒಟ್ಟು ₹ 1000ಗಳ ಸಾಲಕ್ಕೆ 5% ದಂತೆ ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ಪಾವತಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಬಾಕಿ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ)

950, 900, 850, 800 .... 50.

d) ಶಾಲೆಯೊಂದರ 1 ರಿಂದ 12ನೇ ತರಗತಿವರೆಗಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮ ಸ್ಥಾನ ಪಡೆದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ನೀಡುವ ನಗದು ಬಹುಮಾನಗಳು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಹೀಗಿವೆ

200, 250, 300, 350 .... 750.

e) ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳು ₹ 50 ರಂತೆ ಉಳಿಸುತ್ತಾ ಹೋದರೆ 10 ಕಂತುಗಳಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಉಳಿಕೆ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಏಕೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿವರಿಸುವುದು ನಿಮಗೆ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಅಭ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ.

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಡಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ **a** ಮೊದಲ ಪದ, **d** ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವಾಗಿದೆ.

ಮೇಲಿನ (a) ನಿಂದ (e) ತನಕದ ಉದಾಹರಣೆಗಳೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿವೆ. ಎಂಬುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗೆ **ಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ ಕೊನೆಯ ಪದ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ವಿಭಾಗದ (i) ರಿಂದ (v) ರವರೆಗೆ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ

ಶ್ರೇಢಿಗಳಲ್ಲ, ಅವುಗಳು **ಅಪರಿಮಿತ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು**. ಅಂತಹ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ ಕೊನೆಯ ಪದವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿಯಲು ನಿಮಗೆ ಕನಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಮಾಹಿತಿಗಳು ಬೇಕಾಗಿದೆ? ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕೇ? ಅಥವಾ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಮಾತ್ರ ತಿಳಿದರೆ ಸಾಕೇ? ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಇವೆರಡೂ ನಿಮಗೆ ಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು.

ಉದಾ: ಮೊದಲ ಪದ a ಯು 6, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಯು 3 ಆದರೆ ಆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು

$$6, 9, 12, 15 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$a = 6$ ಯು ಮತ್ತು $d = -3$ ಆದಾಗ ಆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ

$$6, 3, 0, -3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ಅದೇ ರೀತಿ $a = -7$, $d = -2$ ಆದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $-7, -9, -11, -13$ ......

$a = 1.0$, $d = 0.1$ ಆದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $1.0, 1.1, 1.2, 1.3$ ....

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$ ಆದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6$ ....

$a = 2$, $d = 0$ ಆದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು $2, 2, 2, 2$ ....

ಆದ್ದರಿಂದ a ಮತ್ತು d ಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ ನೀವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಬಹುದು. ಇದನ್ನು ಬೇರೊಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸಬಹುದೇ? ಅಂದರೆ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಅದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಮತ್ತು ನಂತರ a ಮತ್ತು d ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೀರಾ? a ಮೊದಲ ಪದವಾದ ಕಾರಣ ಅದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಹೇಳಬಹುದು. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪದ ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ ಅದರ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ d ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕೆಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಪದವನ್ನು ಅದರ ಅನುಕ್ರಮ ಮುಂದಿನ ಪದದಿಂದ (ಅಂದರೆ ಒಂದು ಪದದ ನಂತರ ಕೂಡಲೇ ಬರುವ ಮತ್ತೊಂದು ಪದದಿಂದ) ಕಳೆದಾಗ d ಯು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾ:

$6, 9, 12, 15$ ...... ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ಆಗಿದೆ ಈ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ

$$6, 3, 0, -3 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

ಹಾಗೆಯೇ ಇದು ಕೂಡಾ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ಅದರ ಮೊದಲ ಪದ 6 ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ -3

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಆದರೆ

$$d = a_{k+1} - a_k$$

a_{k+1} ಮತ್ತು a_k ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $(k+1)$ ನೇ ಮತ್ತು k ನೇ ಪದಗಳಾಗಿವೆ.

ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ d ಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3 .... ಇವೆಲ್ಲವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದರೆ ಸಾಕು.

1, 1, 2, 3, 5 .... ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಒಂದೇ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಅಲ್ಲ.

6, 3, 0, -3 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ d ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು 3 ರಿಂದ 6ನ್ನು ಕಳೆಯಬೇಕು. 6 ರಿಂದ 3ನ್ನು ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಅಂದರೆ ನಾವು $(k+1)$ ನೇ ಪದವು ಚಿಕ್ಕದಾಗಿದ್ದರೂ ಸಹ k ನೇ ಪದವನ್ನು $(k+1)$ ನೇ ಪದದಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕು.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $a = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದ್ದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ d ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂದು ನೆನಪಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ? ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) 4, 10, 16, 22 .... ii) 1, -1, -3, -5 ....

iii) -2, 2, -2, 2 .... iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 ....

ಪರಿಹಾರ: 1) $a_2-a_1 = 10 - 4 = 6$

$a_3-a_2 = 16 - 10 = 6$

$a_4-a_3 = 22 - 16 = 6$

ಅಂದರೆ $a_{k+1} - a_k$ ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 6$ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ.

ಅದರ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು $22 + 6 = 28$ ಮತ್ತು $28 + 6 = 34$

ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$

ಅಂದರೆ $a_{k+1} - a_k$ ಯು ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = -2$ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ.

ಅದರ ಮುಂದಿನ ಎರಡು ಪದಗಳು

$-5 + (-2) = -7$ ಮತ್ತು $-7 + (-2) = -9$

iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$

$\therefore a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$

$a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ಇಲ್ಲಿ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಏಕೆ?
   i) ಒಂದು ಟ್ಯಾಕ್ಸಿಯ ಬಾಡಿಗೆ ಮೊದಲ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 15 ಆಗಿದ್ದು ನಂತರದ ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 8 ರಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ.
   ii) ಒಂದು ನಿರ್ವಾತಗೊಳಿಸುವ ವಾಯು ರೇಚಕ ಯಂತ್ರವು ಪ್ರತಿಸಲ ಸಿಲಿಂಡರಿನಲ್ಲಿರುವ ಅನಿಲದ $\frac{1}{4}$ ರಷ್ಟು ಅನಿಲವನ್ನು ಹೊರತೆಗೆದರೆ ಉಳಿಯುವ ಅನಿಲದ ಪ್ರಮಾಣಗಳು.
   iii) ಬಾವಿಯನ್ನು ತೋಡುವಾಗ ಮೊದಲ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 150 ನಂತರದ ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 50 ರಂತೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ.
   iv) ಆರಂಭಿಕ ಠೇವಣಿ ₹ 10000 ಕ್ಕೆ 8% ಚಕ್ರಬಡ್ಡಿಯಂತೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಆಗುವ ಮೊತ್ತ
2. ಮೊದಲನೆ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) $a = 10, d = 10$ ii) $a = -2, d = 0$

   iii) $a = 4, d = -3$ iv) $a = -1, d = \frac{1}{2}$

   v) $a = -1.25, d = 0.25$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಿಗೆ ಮೊದಲನೇ ಪದ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) $3, 1, -1, -3$....... ii) $-5, -1, 3, 7$.......

iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ...... iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9$, ...

4. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿವೆ? ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳಾಗಿದ್ದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿದು ಅದರ ಮುಂದಿನ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

i) $2, 4, 8, 16$ .... ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$ ....

iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2$ ..... iv) $-10, -6, -2, 2$ ......

v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}$ .... vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222$ ....

vii) $0, -4, -8, -12$ .... viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ......

ix) $1, 3, 9, 27$ .... x) $a, 2a, 3a, 4a$ ....

xi) a, a^2, a^3, a^4 .... xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}$ ....

xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}$ xiv) $1^1, 3^2, 5^2, 7^2$ ....

xiv) $1^1, 5^2, 7^2, 73$ ....

1.3 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದ

1.1 ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ, ರೀನಾ ಕೆಲಸವೊಂದಕ್ಕೆ ಅರ್ಜಿ ಹಾಕಿ ಆಯ್ಕೆಯಾದಳು. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪುನಃ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ ಅವಳಿಗೆ ಆರಂಭಿಕ ತಿಂಗಳ ವೇತನ ₹ 8000 ಹಾಗೂ ವಾರ್ಷಿಕ ₹ 500 ಹೆಚ್ಚುವರಿ ನೀಡಲು ಒಪ್ಪಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿತ್ತು. ಅವಳು 5ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ ಎಷ್ಟು?

ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಅವಳು ಎರಡನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವ ತಿಂಗಳ ವೇತನ ಎಷ್ಟು? ಎಂದು ಮೊದಲು ನೋಡುವ.

ಅದು ₹ (8000+500) = ₹ 8500 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ ನಾವು 3ನೇ, 4ನೇ ಮತ್ತು 5ನೇ ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳವನ್ನು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳಕ್ಕೆ ₹ 500 ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ 3ನೇ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹ [8000 + (3 − 1) 500] 3ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ

= ₹ 9000

4ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸಂಬಳ = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

$= ₹ (8000 + 3 \times 500)$

$= ₹ [8000 + (4 - 1) 500]$ 4ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ

$= ₹ 9500$

5ನೇ ವರ್ಷಕ್ಕೆ ಸಂಬಳ $= ₹ (9500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500 + 500)$

$= ₹ (8000 + 4 \times 500)$

$= ₹ [8000 + (5 - 1) 500]$ 5ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ

$= ₹ 10000$

ನಾವು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

8000, 8500, 9000, 9500, 10000 ....

ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಏಕೆ?

ಈಗ ಮೇಲೆ ಉಂಟಾಗಿರುವ ವಿನ್ಯಾಸ ಗಮನಿಸಿ. ಅವಳ 6ನೇ ವರ್ಷದ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? 15ನೇ ವರ್ಷದ್ದು? ಮತ್ತು ಅವಳು ಇನ್ನೂ ಅದೇ ಕೆಲಸದಲ್ಲಿದ್ದಾಳೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ. 25ನೇ ವರ್ಷದ ತಿಂಗಳ ಸಂಬಳ ಎಷ್ಟು? ಇದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ ಉತ್ತರಿಸಲು ಹಿಂದಿನ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳಕ್ಕೆ ₹ 500 ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಬಹುದೇ? ನೋಡೋಣ. ಈಗಾಗಲೇ ಮೇಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಬಳಗಳನ್ನು ಪಡೆದಾಗ ನೀವು ಕೆಲವು ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಬಹುದು.

15ನೇ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ

$= 14$ನೇ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ $+ ₹ 500$

$$= ₹ \left[8000 + \underbrace{500 + 500 + ... + 500}_{13 \text{ ಸಲ}}\right] + ₹ 500$$

$= ₹ [8000 + 14 \times 500]$

$= ₹ [8000 + (15-1) \times 500] = ₹ 15000$

ಅಂದರೆ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ $+ (15-1) \times$ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚುವರಿ

ಇದೇ ರೀತಿ ಅವಳ 25ನೇ ವರ್ಷದ ಮಾಸಿಕ ವೇತನವು

$= [8000 + (25-1) \times 500] = ₹ 20000$

$=$ ಮೊದಲನೇ ವರ್ಷದ ಸಂಬಳ $+ (25-1) \times$ ವಾರ್ಷಿಕ ಹೆಚ್ಚುವರಿ

ಈ ಉದಾಹಣೆಯು ನಿಮಗೆ 15ನೇ ಪದ, 25ನೇ ಪದ ಅಲ್ಲದೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು ಎನ್ನುವ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

a_1, a_2, a_3 .... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲನೇ ಪದ a_1 ಇದು a ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ,

ಎರಡನೇ ಪದ $a_2 = a + d = a + (2-1)\ d$

ಮೂರನೇ ಪದ $a_3 = a_2 + d = a+d+d = a+2d = a + (3-1)\ d$

ನಾಲ್ಕನೇ ಪದ $a_4 = a_3 + d = (a+2d)+d = a+3d = a + (4-1)\ d$

....

....

ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ನಾವು **n**ನೇ ಪದ ಹೇಳಬಹುದು $a_n = a + (n-1)d$

ಆದ್ದರಿಂದ **ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಆದಾಗ ಅದರ nನೇ ಪದವು $a_n = a + (n-1)d$.**

a_nನ್ನು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ವೇಳೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ m ಪದಗಳಿದ್ದರೆ a_m ಇದು ಕೊನೆಯ ಪದವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಕೆಲವು ಸಲ l ನಿಂದ ಕೂಡಾ ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ.

ಈಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ

ಉದಾಹರಣೆ 3: 2, 7, 12 ...... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 10ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $a = 2,\ d = 7 - 2 = 5$ ಮತ್ತು $n = 10$

$$a_n = a + (n-1)d$$

ಆದ್ದರಿಂದ $a_{10} = 2 + (10-1)5 = 2 + 9 \times 5 = 2 + 45 = 47$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 10ನೇ ಪದ = 47

ಉದಾಹರಣೆ 4: 21, 18, 15 ...... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದವು –81 ಆಗಿದೆ? ಮತ್ತು ಯಾವುದೇ ಪದ 0 ಆಗಿದೆಯೆ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $a = 21,\ d = 18 - 21 = -3$ ಮತ್ತು $a_n = -81$. ಆದಾಗ ನಾವು n ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$-81 = 21 + (n-1)(-3)$$

$$-81 = 24 - 3n$$

$$-105 = -3n$$

ಆದ್ದರಿಂದ $n = 35$

ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 35ನೇ ಪದ = –81 ಆಗಿದೆ ನಂತರ ನಾವು ತಿಳಿಯಬೇಕಾಗಿರುವುದು

ಯಾವುದಾದರೊಂದು n ಗೆ $a_n = 0$ ಆಗಿದೆಯೇ? ಅಂತಹ n ಇದ್ದರೆ,

ನಂತರ $21 + (n - 1)(-3) = 0$

ಅಂದರೆ $3(n - 1) = 21$

ಅಂದರೆ $n = 8$

ಆದ್ದರಿಂದ 8ನೇ ಪದವು 0 ಆಗಿದೆ

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಪದ 5 ಮತ್ತು 7ನೇ ಪದ 9 ಆದರೆ ಆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$a_3 = a + (3 - 1)d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

ಮತ್ತು $$a_7 = a + (7 - 1)d = a + 6d = 9 \quad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ಏಕಕಾಲಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದರಿಂದ

$$a = 3, \ d = 1$$

ಎಂದು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯು 3, 4, 5, 6, 7 ....

ಉದಾಹರಣೆ 6: 301, ಇದು 5, 11, 17, 13 .... ಈ ಸಂಖ್ಯಾಪಟ್ಟಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \ a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \ a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

$$a_n = a + (n - 1)d$$

$$301 = 5 + (n - 1) \times 6$$

ಅಂದರೆ $301 = 6n - 1$

ಆದ್ದರಿಂದ $n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$

ಆದರೆ ಇದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿರಲೇ ಬೇಕು (ಏಕೆ?) ಆದ್ದರಿಂದ 301 ಇದು ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಎರಡು ಅಂಕಿಗಳ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ: 12, 15, 18 99

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯೇ? ಹೌದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ಇಲ್ಲಿ $a = 12$ $d = 3$, $a_n = 99$

ಸೂತ್ರ $$a_n = a + (n - 1)d$$

$$99 = 12 + (n - 1) \times 3$$

$$87 = (n - 1) \times 3$$

ಅಂದರೆ $n - 1 = \frac{87}{3} = 29$

ಅಂದರೆ $n = 29 + 1$

ಅಂದರೆ $n = 30$

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಅಂಕೆಗಳ 30 ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 3 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಕೊನೆಯಿಂದ 11ನೇ (ಮೊದಲನೆ ಪದದ ಕಡೆಗೆ) ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. 10, 7, 4 62

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ, $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3\ \ l = -62$

ಆದರೆ $l = a + (n - 1)d$

ಕೊನೆಯಿಂದ 11ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾದರೆ ನಾವು ಆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಆದ್ದರಿಂದ $-62 = 10 + (n - 1)(-3)$

$$-72 = (n - 1)(-3)$$

$$n - 1 = 24$$

$\therefore$ $n = 25$

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ 25 ಪದಗಳಿವೆ ಕೊನೆಯಿಂದ 11ನೇ ಪದವು 15ನೇ ಪದವಾಗಿದೆ.(ಅದು 14ನೇ ಪದವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಏಕೆ?)

ಆದರೆ $a_{15} = 10 + (15 - 1)(-3) = 10 - 42 = -32$

ಅಂದರೆ ಕೊನೇಯ ಪದದಿಂದ 11ನೇ ಪದ -32 ಆಗಿದೆ.

ಪರ್ಯಾಯ ಪರಿಹಾರ:

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ಬದಿಯಿಂದ (ಕೊನೆಯಿಂದ) ಬರೆದರೆ $a = -62$, $d = 3$ (ಏಕೆ?) ಅಂದರೆ, ಈಗ ಪ್ರಶ್ನೆಯು ಈ a ಮತ್ತು d ಗಳ 11ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದಾಗಿದೆ.

ಅದು $a_{11} = -62 + (11 - 1)3 = -62 + 30 = -32$

ಅದು 11ನೇ ಪದ, ಅಂದರೆ ನಮಗೆ ಈಗ ಬೇಕಾಗಿರುವ ಪದವು -32 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ₹1000 ಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು 8% ದರದಂತೆ ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯ ಪ್ರಕಾರ ಠೇವಣಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷದ ಅಂತ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಬಡ್ಡಿಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆಯೆ? ಹಾಗಾದರೆ ಈ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಸರಳ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಸೂತ್ರ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಅದು,

$$\text{ಸರಳ ಬಡ್ಡಿ} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೆ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ $= \dfrac{1000 \times 8 \times 1}{100} = ₹\,80$

ಎರಡನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ $= \dfrac{1000 \times 8 \times 2}{100} = ₹\,160$

ಮೂರನೇ ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ $= \dfrac{1000 \times 8 \times 3}{100} = ₹\,240$

ಹೀಗೆಯೇ ನಾವು 4ನೇ, 5ನೇ ಇತ್ಯಾದಿ ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ ...... ವರ್ಷದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಬಡ್ಡಿ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಕ್ರಮವಾಗಿ

80, 160, 240 ....

ಪಟ್ಟಿಯ ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 80 ಆಗಿರುವ ಕಾರಣ ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. ಅಂದರೆ $d = 80$ ಮತ್ತು $a = 80$

ಹಾಗೆ 30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು a_{30} ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ $a_{30} = a + (30-1)d = 80 + 29 \times 80 = 2400$

ಆದ್ದರಿಂದ 30 ವರ್ಷಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬಡ್ಡಿಯು ₹ 2400 ಆಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಒಂದು ಹೂ ಹಾಸಿನ ಮೊದಲನೇ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 23 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳಿವೆ. 2ರಲ್ಲಿ 21, 3ರಲ್ಲಿ 19 ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಕೊನೆಯ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ಗುಲಾಬಿ ಗಿಡಗಳಿದ್ದರೆ ಆ ಹೂ ಹಾಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: 1, 2, 3ನೇ .... ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿರುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

23, 21, 19 5

ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ (ಏಕೆ?) ಹೂ ಹಾಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗಿರಲಿ.

$a = 23,\ d = 21 - 23 = -2,\ a_n = 5$

ಆದರೆ $a_n = a + (n-1)d$

$5 = 23 + (n-1)(-2)$

ಅಂದರೆ $-18 = (n-1)(-2)$

$\therefore$ $n = 10$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಹೂ ಹಾಸಿನಲ್ಲಿರುವ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 10.

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಜಾಗಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ, ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d, n ನೇ a_n ಪದ ಆಗಿದೆ.

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	....
(ii)	–18	....	10	0
(iii)	.....	–3	18	–5
(iv)	–18.9	2.5	......	3.6
(v)	3.5	0	105	.....

2. ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಗೆ ಸರಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಸಮರ್ಥಿಸಿ

(i) 10, 7, 4 ..... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 30ನೇ ಪದ

(A) 97 (B) 77 (C) –77 (D) –87

(ii) –3, $-\frac{1}{2}$, 2, ... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 11 ನೇ ಪದ

(A) 28 (B)22 (C) –38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಬಾಕ್ಸ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಖಾಲಿ ಬಿಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳನ್ನು ತುಂಬಿಸಿ.

(i) 2, $\square$, 26

(ii) $\square$, 13, $\square$, 3

(iii) 5 $\square$, $\square$, $9\frac{1}{2}$

(iv) –4, $\square$, $\square$, $\square$, $\square$, 6

(v) $\square$, 38, $\square$, $\square$, $\square$, –22

4. 3, 8, 13, 18 ...... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ 78?

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುವ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

(i) 7, 13, 19 .... 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13 .... –47

6. –150 ಇದು 11, 8, 5, 2 ..... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

7. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 11ನೇ ಪದ 38, 16ನೇ ಪದ 73 ಆದರೆ 31ನೇ ಪದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. 50 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಪದ 12 ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ 106 ಆದರೆ 29ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

9. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಮತ್ತು 9ನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 4 ಮತ್ತು –8 ಆದರೆ ಅದರ ಎಷ್ಟನೇ ಪದ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದೆ?

10. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 17ನೇ ಪದವು ಅದರ 10ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 7 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

11. 3, 15, 27, 39 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಯಾವ ಪದವು ಅದರ 54ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 132 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದೆ?

12. ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ. ಅವುಗಳ 100ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 100 ಆದರೆ 1000ನೇ ಪದಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನು?

13. ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 7ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ?

14. 10 ಮತ್ತು 250ರ ನಡುವಿನ 4ರ ಗುಣಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
15. n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ 63, 65, 67 .... ಮತ್ತು 3, 10, 17 ... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ n ನೇ ಪದಗಳು ಸಮಾವಾಗಿರುತ್ತವೆ?
16. ಮೂರನೇ ಪದ 16, 7ನೇ ಪದವು 5ನೇ ಪದಕ್ಕಿಂತ 12 ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
17. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ 3, 8, 13 .... 253 ಇದರ ಕೊನೆಯಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ 20ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
18. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 4ನೇ ಮತ್ತು 8ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 24 ಮತ್ತು 6ನೇ ಮತ್ತು 10ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 44 ಆದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ
19. ವಾರ್ಷಿಕ ಸಂಬಳ ₹ 5000 ಮತ್ತು ಪ್ರತಿವರ್ಷಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಭತ್ಯೆ ₹ 200 ಇರುವ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಸುಬ್ಬರಾವ್ 1995 ರಲ್ಲಿ ಸೇರಿದರು. ಯಾವ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಅವರ ಸಂಬಳ ₹ 7000 ಆಗುತ್ತದೆ?
20. ರಾಮ್ಕಲಿಯು ವರ್ಷದ ಮೊದಲನೇ ವಾರದಲ್ಲಿ ₹ 5 ನ್ನು ಉಳಿಸಿದಳು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿವಾರ ಅವಳ ಉಳಿತಾಯವನ್ನು ₹ 1.75ಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿಸಿದಳು. nನೇ ವಾರದಲ್ಲಿ ಅವಳ ಉಳಿತಾಯ ₹ 20.75 ಆದರೆ n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

1.4 ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ *n* ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ

ವಿಭಾಗ 1.1 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವಂತೆ ಶಕೀಲಾ ತನ್ನ ಮಗಳ ಮೊದಲನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬಕ್ಕೆ ಅವಳ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಗೆ ₹ 100 ಹಾಕುತ್ತಾಳೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪುನಃ ಪರಿಗಣಿಸುವ. ನಂತರ ₹ 150 ಎರಡನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬಕ್ಕೆ ₹ 200 ಮೂರನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬಕ್ಕೆ ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತಾಳೆ. ಅವಳ ಮಗಳಿಗೆ 21 ವರ್ಷವಾದಾಗ ಆ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಹಣ ಸಂಗ್ರಹವಾಗುತ್ತದೆ?

ಇಲ್ಲಿ ಅವಳ ಮೊದಲನೆ. ಎರಡನೇ, ಮೂರನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ ..... 21ನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದವರೆಗೆ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಕ್ರಮವಾಗಿ 100, 150, 200, 250 ..... ಅವಳ 21ನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬದವರೆಗೆ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿ ಹಾಕಿದ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಮೇಲಿನ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿರುವ ಎಲ್ಲಾ 21 ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬರೆದು ನಂತರ ಕೂಡಿಸಬೇಕು. ಇದು ಬಹಳ ಆಯಾಸಕರ ಮತ್ತು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಲಿಲ್ಲವೇ? ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತಗೊಳಿಸಬಹುದೇ? ಮೊತ್ತವನ್ನು ಪಡೆಯುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಇದು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಾಗಬಹುದು ಎಂದು ನಾವೀಗ ತಿಳಿಯೋಣ.

ಗಾಸ್ (ಅವನ ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಾಯ 8ರಲ್ಲಿ ಓದಲಿದ್ದೀರಿ) 10 ವರ್ಷದವನಿದ್ದಾಗ ಅವನಿಗೆ ಕೊಟ್ಟ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. 1 ರಿಂದ 100 ರವರೆಗಿನ ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವನಿಗೆ ಹೇಳಲಾಗಿತ್ತು. ಅವನು ಕೂಡಲೇ ಆ ಮೊತ್ತ 5050 ಎಂದು ಉತ್ತರಿಸಿದ.

ಅವನು ಏನು ಮಾಡಿದ ಎಂದು ನೀವು ಊಹೆ ಮಾಡಬಹುದೇ? ಅವನು ಹೀಗೆ ಬರೆದ:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 99 + 100$$

ಅವನು ಮತ್ತೆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಬರೆದ

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

ಇವೆರಡನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots\ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$

$$= 101 + 101 + 101 + \ldots\ldots + 101 + 101 + 101 \text{ (100 ಸಲ)}$$

ಆದರೆ, $S = \frac{100 \times 101}{100} = 5050$ ಅಂದರೆ ಮೊತ್ತವು $= 5050$

ನಾವು ಅದೇ ತಂತ್ರವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$$a, a + d, a + 2d + \ldots\ldots$$

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದ $a + (n - 1)d$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ S ಆಗಿರಲಿ ನಮಗೆ

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots\ldots [a + (n - 1)d] \qquad (1)$$

ಪದಗಳನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಿಂದ ತಿರುಗಿಸಿ ಬರೆದಾಗ, ನಮಗೆ

$$S = [a + (n - 1)d] + a + (n - 2)d] + \ldots\ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ರ ಪ್ರತಿ ಪದಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ

$$2S = \underbrace{[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d+ \ldots\ldots +[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]}_{\text{n ಪದಗಳು}}$$

ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಥವಾ $2S = n\,[2a + (n - 1)d]$ (ಇಲ್ಲಿ n ಪದಗಳಿರುವ ಕಾರಣ)

ಅಥವಾ $S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)d]$

ಆದ್ದರಿಂದ **ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ಪದಗಳ ವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವು**

$$\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)d]}$$

ನಾವು ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯಬಹುದು

$$S = \frac{n}{2}\,[a + a + (n - 1)d]$$

ಅಂದರೆ $\mathbf{S = \frac{n}{2}\,[a + a_n]}$ (3)

ಈಗ, ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ n ಪದಗಳಿದ್ದರೆ $a_n = l$, ಕೊನೆಯ ಪದ

(3) ರಿಂದ $\mathbf{S} = \frac{n}{2}\ [\mathbf{a} + \boldsymbol{l}]$ (4)

ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕೊಡದೆ ಮೊದಲ ಪದ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ ಈ ರೀತಿಯ ಸೂತ್ರವು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಕೇಳಲಾಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ನಾವೀಗ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಶಕೀಲಾಳ ಮಗಳ 1ನೇ, 2ನೇ, 3ನೇ 4ನೇ .... ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬಗಳಲ್ಲಿ ಹಣದ ಪೆಟ್ಟಿಗೆಯಲ್ಲಿದ್ದ ಹಣ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಕ್ರಮವಾಗಿ 100, 150, 200, 250... ಆಗಿತ್ತು.

ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿ. 21ನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬಕ್ಕೆ ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಒಟ್ಟು ಹಣವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 21 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಇಲ್ಲಿ $a = 100$, $d = 150$, ಮತ್ತು $n = 21$ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ

$$S = \frac{n}{2}\ [2a + (n - 1)d]$$

ನಮಗೆ $$S = \frac{21}{2}\ [2 \times 100 + (21 - 1) \times 50] = [200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2}[1200] = 12600$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅವಳ 21ನೇ ಹುಟ್ಟುಹಬ್ಬಕ್ಕೆ ಸಂಗ್ರಹವಾದ ಹಣ ₹ 12600

ಸೂತ್ರದ ಉಪಯೋಗವು ಸಮಸ್ಯೆ ಬಿಡಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತುಂಬಾ ಸರಳಗೊಳಿಸಲಿಲ್ಲವೇ?

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢೀಯ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು S ಗೆ ಬದಲಾಗಿ S_n ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 20 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ನಾವು S_{20} ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು S, a, d ಮತ್ತು n ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಪರಿಣಾಮಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದ್ದರೆ ನಾಲ್ಕನೇಯದನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಗಮನಿಸಿ: ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೇ ಪದವು, ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಮತ್ತು ಮೊದಲ (n – 1) ಪದಗಳ ಮೊತ್ತದ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $a_n = S_n - S_{n-1}$ ನಾವೀಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: 8, 3, 2 ..... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 22 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $a = 8$, $b = 3 - 8 = -5$, $n = 22$.

ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ

$$S = \frac{n}{2}\ [2a + (n - 1)d]$$

ಆದ್ದರಿಂದ $$S = \frac{22}{2}\ [16+21(-5)]$$

$$= 11\ (16 - 105)$$

$$= 11\ (-89) = -979$$

ಹಾಗಾದರೆ, ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 22 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು –979 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ 14 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 1050. ಅದರ ಮೊದಲನೇ ಪದ 10, ಅದರೆ 20ನೇ ಪದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $S_{14} = 1050,\ n = 14,\quad a = 10$

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d]$$

$$1050 = 140 + 91d$$

$$910 = 91d$$

$$\therefore \quad d = 10$$

ಆದ್ದರಿಂದ $a_{20} = 10 + (20 - 1) \times 10 = 200$ ಅಂದರೆ 20ನೇ ಪದ 200 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 13: 24, 21, 18 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 78 ಆಗಿದೆ?

ಪರಿಹಾರ: $a = 24,\ d = 21-24 = -3,\quad S_n = 78$ ನಾವು n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ

ಆದರೆ $$78 = \frac{n}{2}[48 + (n-1)(-30)] = \frac{n}{2}(51 - 3n)$$

$$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

$$n^2 - 17 + 52 = 0$$

$$(n-4)(n-13) = 0$$

$\therefore \quad n = 4$ ಅಥವಾ 13

n ನ ಎರಡೂ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಸ್ವೀಕಾರಾರ್ಹ, ಆದ್ದರಿಂದ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 4 ಅಥವಾ 13.

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಈ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ನಾಲ್ಕು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = ಮೊದಲ 13 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = 78
2. 5ನೇ ಪದದಿಂದ 13ನೇ ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರುವ ಕಾರಣ ಎರಡು ಉತ್ತರಗಳು ಸಾಧ್ಯವಾಗಿರುವುದು. ಇದರಲ್ಲಿ a ಯು ಧನಾತ್ಮಕ ಮತ್ತು d ಯು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಿರುವ ಕಾರಣ ಕೆಲವು ಪದಗಳು ಧನ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಪದಗಳು ಋಣ ಇದ್ದಾಗ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಡೆದು ಹೋಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 14: ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) ಮೊದಲ 1000 ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

(ii) ಮೊದಲ n ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು

ಪರಿಹಾರ:

(i) $S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 1000$ ಆಗಿರಲಿ

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

ನಮಗೆ $S_{1000} = \frac{1000}{2}[1 + 1000] = 500 \times 1001 = 500500$

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ 1000 ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು 500500

(ii) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$ ಆಗಿರಲಿ

ಇಲ್ಲಿ $a = 1$ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದ $l = n$ ಆಗಿದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ $S_n = \frac{n(1 + n)}{2}$ ಅಥವಾ $S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$

ಹಾಗಾದರೆ ಮೊದಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವು

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2} \text{ ಆಗಿದೆ}$$

ಉದಾಹರಣೆ 15: n ನೇ ಪದ $a_n = 3 + 2n$ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ 24 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಅಂದರೆ $a_n = 3 + 2n$

ಆದರೆ $a_1 = 3 + 2 = 5$

$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$

$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$

$\vdots$

ಆ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿ 5, 7, 9, 11 ....

ಇಲ್ಲಿ, $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ....

ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ $d = 2$ ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ.

S_{24}ನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $n = 24,\ a = 5,\ d = 2$

ಆದ್ದರಿಂದ, $S_{24} = \frac{24}{2}[2 \times 5 + (24 - 1) \times 2] = 12\,[10 + 46] = 672$

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಸಂಖ್ಯಾ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲ 24 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವು 672 ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 16: ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ತಯಾರಕರೊಬ್ಬರು ಮೂರನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 600 ಸೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಏಳನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ 700 ಸೆಟ್‌ಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ವರ್ಷ ಅವರ ಉತ್ಪಾದನೆ ಸ್ಥಿರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.

(i) ಮೊದಲ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ (ii) 10ನೇ ವರ್ಷದ ಉತ್ಪಾದನೆ

(iii) 7 ವರ್ಷಗಳ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ: i) ಉತ್ಪಾದನೆ ಪ್ರತಿವರ್ಷ ಒಂದು ಸ್ಥಿರವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ ಹೆಚ್ಚಾಗುವ ಕಾರಣ 1ನೇ, 2ನೇ 3ನೇ .... ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ.

n ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು a_n ಎಂದು ಸೂಚಿಸುವ

ಆದರೆ $a_3 = 600$ ಮತ್ತು $a_7 = 700$

ಅಥವಾ $a + 2d = 600$

ಮತ್ತು $a + 6d = 700$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $d = 25$ ಮತ್ತು $a = 550$ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 550

ii) ಈಗ $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

ಆದ್ದರಿಂದ 10ನೇ ವರ್ಷದಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 775

iii) ಹಾಗೇ $S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7 - 1) \times 25]$

$$= \frac{7}{2}[1100 + 50] = 4375$$

ಹೀಗೆ 7 ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಉತ್ಪಾದಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಟೆಲಿವಿಷನ್ ಸೆಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = 4375

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   i) 2, 7, 12 ...... ರ 10 ಪದಗಳವರೆಗೆ

   ii) –37, –33, –29 ...... ರ 12 ಪದಗಳವರೆಗೆ

   iii) 0.6, 1.7, 2.8 ..... ರ 100 ಪದಗಳವರೆಗೆ

   iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}$ ...... ರ 11 ಪದಗಳವರೆಗೆ

2. ಇವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots\ldots + 84$

   ii) $34 + 32 + 30 + \ldots\ldots + 10$

   iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots. + (-230)$

3. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ

   i) $a = 5$, $d = 3$, $a_n = 50$ ಆದರೆ n ಮತ್ತು S_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   ii) $a = 7$, $a_{13} = 35$ ಆದರೆ d ಮತ್ತು S_{13} ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   iii) $a_{12} = 37$, $d = 3$ ಆದರೆ a ಮತ್ತು S_{12} ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

iv) $a_3 = 15$, $S_{10} = 125$ ಆದರೆ d ಮತ್ತು a_{10} ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

v) $d = 5$, $S_9 = 75$ ಆದರೆ a ಮತ್ತು a_9 ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

vi) $a = 2$, $d = 8$, $S_n = 90$ ಆದಾಗ n ಮತ್ತು a_n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

vii) $a = 8$, $a_n = 62$, $S_n = 210$ ಆದಾಗ n ಮತ್ತು d ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

viii) $a_n = 4$, $d = 2$, $S_n = -14$ ಆದರೆ n ಮತ್ತು a ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ix) $a = 3$, $n = 8$, $S = 192$ ಆದರೆ d ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

x) $l = 28$, $S = 144$ ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 9 ಇದ್ದರೆ a ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

4. ಮೊತ್ತ 636 ಸಿಗಬೇಕಾದರೆ 9, 17, 25 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಪದ 5, ಕೊನೆಯ ಪದ 45 ಮತ್ತು ಮೊತ್ತ 400 ಆದರೆ ಅದರ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ ಮತ್ತು ಕೊನೆಯ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 17 ಮತ್ತು 350 ಆಗಿವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 9 ಆದರೆ ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತ ಎಷ್ಟು?

7. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ $d = 7$ ಮತ್ತು 22 ನೇ ಪದ 149 ಆದರೆ 22 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

8. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎರಡನೇ ಮತ್ತು ಮೂರನೇ ಪದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 14 ಮತ್ತು 18 ಆದರೆ ಅದರ 51 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

9. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 7 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ 49 ಮತ್ತು 17 ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ 289. ಆದರೆ ಮೊದಲ n ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತವೇನು?

10. a_n ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n, \ldots$ ಇದು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ

i) $a_n = 3 + 4n$ ii) $a_n = 9 - 5n$

11. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳವರೆಗಿನ ಮೊತ್ತ $4n - n^2$ ಆದರೆ ಮೊದಲ ಪದ (S_1) ಎಷ್ಟು? ಮೊದಲ ಎರಡು ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು? ಎರಡನೇ ಪದ ಎಷ್ಟು? ಅದೇ ರೀತಿ 3ನೇ ಪದ, 10ನೇ ಪದ ಮತ್ತು nನೇ ಪದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುವ ಮೊದಲ 40 ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

13. ಮೊದಲ 15, 8ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

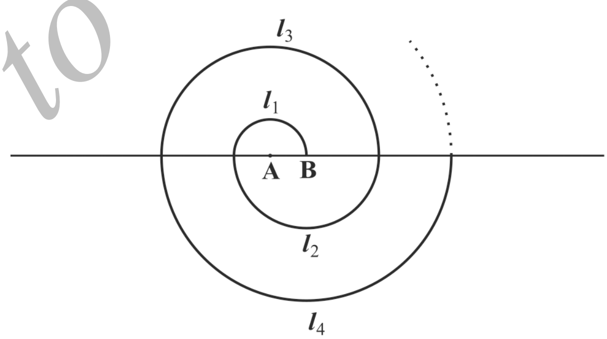
14. 0 ಮತ್ತು 50 ರ ನಡುವಿನ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?

15. ಕಟ್ಟಡವೊಂದರ ಕೆಲಸದ ಗುತ್ತಿಗೆಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಮಯದ ನಂತರ ತಡವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಿದರೆ, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಪದ ದಂಡವನ್ನು ವಿಧಿಸಲಾಗಿತ್ತು. ಅದು ಹೀಗಿದೆ: ಮೊದಲನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ₹ 200, ಎರಡನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ₹ 250, 3ನೇ ದಿನಕ್ಕೆ ₹ 300 ಇತ್ಯಾದಿ. ಪ್ರತಿ ದಿನದ ದಂಡವು ಅದರ ಹಿಂದಿನ ದಿನದ ದಂಡಕ್ಕಿಂತ ₹ 50 ಜಾಸ್ತಿ ಹಾಗಾದರೆ ಒಬ್ಬ ಗುತ್ತಿಗೆದಾರನು ಒಂದು ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ತಿಗೊಳಿಸಲು 30 ದಿನಗಳ ಕಾಲ ಹೆಚ್ಚು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಅವನು ಕೊಡಬೇಕಾದ ದಂಡವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ?

16. ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಸಮಗ್ರ ವಾರ್ಷಿಕ ನಿರ್ವಹಣೆಗಾಗಿ 7 ನಗದು ಬಹುಮಾನಕ್ಕಾಗಿ ₹ 700ರ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ಪ್ರತಿ ಬಹುಮಾನವು ಅದರ ಮುಂಚಿನ ಬಹುಮಾನಕ್ಕಿಂತ ₹ 20 ಕಡಿಮೆಯಾದರೆ ಪ್ರತಿ ಬಹುಮಾನಗಳ ಮೌಲ್ಯ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

17. ವಾಯುಮಾಲಿನ್ಯವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲು ಒಂದು ಶಾಲೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಶಾಲೆಯ ಒಳ ಆವರಣ ಮತ್ತು ಹೊರ ಆವರಣ ಗಿಡಗಳನ್ನು ನೆಡುವ ಯೋಚನೆ ಮಾಡಿದರು. ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯ ಪ್ರತಿ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನೆಡುವ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅವರು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ತರಗತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಗಿದೆ. ಉದಾ: 1ನೇ ತರಗತಿಯ ಒಂದು ವಿಭಾಗವು 1 ಗಿಡವನ್ನು, ಎರಡನೇ ತರಗತಿಯ ವಿಭಾಗವು 2 ಗಿಡಗಳನ್ನು ಹೀಗೆ 12ನೇ ತರಗತಿಗಳವರೆಗೆ ಮುಂದುವರಿದಿದೆ. ಪ್ರತಿ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಭಾಗಗಳಿದ್ದರೆ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೆಡಬೇಕಾದ ಗಿಡಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

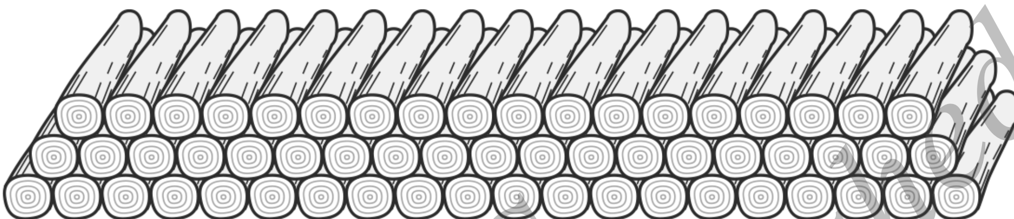
18. ಒಂದು ಸುರುಳಿಯನ್ನು ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ ಅವುಗಳ ಕೇಂದ್ರಗಳು ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ A ಮತ್ತು B ನಲ್ಲಿದ್ದು A ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಆರಂಭವಾಗಿ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 0.5cm, 1cm, 1.5cm, 2cm .... ಹೀಗೆ ಚಿತ್ರ 1.4 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇದೆ. ಈ ರೀತಿ ಹದಿಮೂರು ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆ ವೃತ್ತಗಳಿಂದ ಮಾಡಲ್ಪಟ್ಟ ಸುರುಳಿಯ ಒಟ್ಟು ಉದ್ದ ಏನು? ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ)



ಚಿತ್ರ 1.4

[**ಸುಳುಹು:** ಕೇಂದ್ರಗಳು A, B,A,B ….. ಇರುವಂತೆ ಕ್ರಮಾಗತ ಅರೆವೃತ್ತಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ l_1, l_2, l_3, l_4, …..]

19. 200 ಮರದ ದಿಮ್ಮಿ (ಕೊರಡು)ಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಡೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದನ್ನು ಜೋಡಿಸಲಾಗಿದೆ. ಕೆಳಭಾಗದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 20 ದಿಮ್ಮಿಗಳು ಆ ನಂತರದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 19 ದಿಮ್ಮಿಗಳು ಹೀಗೆ ಮುಂದುವರಿದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 1.5ನ್ನು ನೋಡಿ) 200 ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು ಎಷ್ಟು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ದಿಮ್ಮಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?



ಚಿತ್ರ 1.5

20. ಒಂದು ಆಲೂಗಡ್ಡೆ ಓಟದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬುಟ್ಟಿಯನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭದಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೇ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯಿಂದ 5m ದೂರದಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ ಉಳಿದ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಪರಸ್ಪರ 3m ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಆ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಒಟ್ಟು 10 ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 1.6 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಚಿತ್ರ 1.6

ಒಬ್ಬ ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಬಕೆಟ್‌ನಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಅದರ ಸಮೀಪದಲ್ಲಿರುವ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಓಡಿ ಬಕೆಟ್‌ಗೆ ಹಾಕಬೇಕು. ನಂತರ ಅಲ್ಲಿಂದ ಪುನಃ ಓಡಿ 2ನೆ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಹಿಂದಕ್ಕೆ ಓಡಿ ಬಕೆಟಿಗೆ ಹಾಕಬೇಕು. ಅವಳು ಇದೇ ರೀತಿ ಎಲ್ಲಾ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳು ಬಕೆಟ್‌ನಲ್ಲಿ ಬಂದು ಬೀಳುವವರೆಗೂ ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಓಡಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರವೇನು?

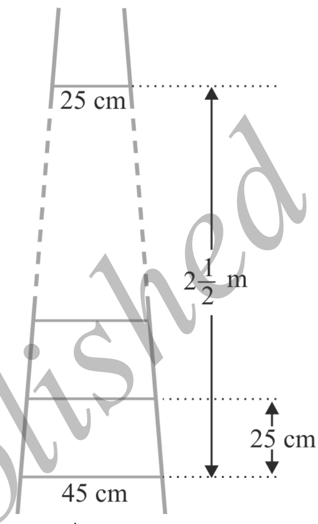
[**ಸುಳುಹು:** ಮೊದಲನೇ ಮತ್ತು 2ನೇ ಆಲೂಗಡ್ಡೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲು ಸ್ಪರ್ಧಿಯು ಓಡಿದ ಒಟ್ಟು ದೂರ (m ಗಳಲ್ಲಿ) $2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$]

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. 121, 117, 113 .... ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಋಣ ಪದವು ಎಷ್ಟನೇ ಪದವಾಗಿದೆ?

   [**ಸುಳುಹು:** $a_n < 0$ ಗೆ n ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ]

2. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ 3ನೇ ಮತ್ತು 7ನೇ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ 6 ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ 8. ಆದರೆ ಅದರ ಮೊದಲ 16 ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವೇನು?



ಚಿತ್ರ 1.7

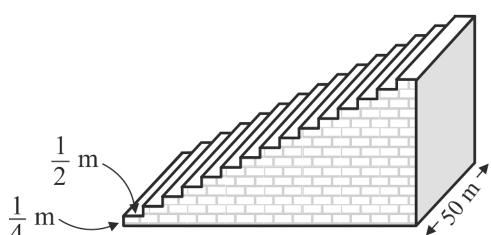
3. ಒಂದು ಏಣಿಯ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳು ಪರಸ್ಪರ 25cm ಅಂತರದಲ್ಲಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 1.7ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅವುಗಳ ಅಳತೆ ಒಂದೇ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಏಣಿಯ ಪಾದದ ಮೆಟ್ಟಿಲು 45cm ಮತ್ತು ತುದಿಯ ಮೆಟ್ಟಿಲು 25cm ಆಗಿದೆ. ಪಾದ ಮತ್ತು ತುದಿಯ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ $2\frac{1}{2}$ ಮೀಟರ್ ಆದರೆ ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳಿಗೆ ಬೇಕಾದ ಮರದ ಉದ್ದವೇನು?

   [**ಸುಳುಹು:** ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ = $\frac{250}{25} + 1$]

4. ಒಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮನೆಗಳಿಗೆ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 1 ರಿಂದ 49 ರವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ x ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆ ನೀಡಿರುವ ಮನೆಯ ಮೊದಲಿನ ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅದರ ನಂತರದ ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಇದೆ. ಆದರೆ x ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   [**ಸುಳುಹು:** $S_{x-1} = S_{49} - S_x$]

5. ಕಾಲ್ಚೆಂಡು ಮೈದಾನದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ತಾರಸಿಯ ಮೇಲ್ಭಾಗಕ್ಕೆ ಹೋಗಲು 15 ಮೆಟ್ಟಿಲುಗಳಿದ್ದು ಪ್ರತಿ ಮೆಟ್ಟಿಲಿನ ಉದ್ದ 50m ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ಗಟ್ಟಿ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್‌ನಿಂದ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 1.8

   ಪ್ರತಿ ಮೆಟ್ಟಿಲನ ಎತ್ತರ $\frac{1}{4}$m ಮತ್ತು ಅಗಲ $\frac{1}{2}$m (ಚಿತ್ರ 1.8 ನೋಡಿ) ಹಾಗಾದರೆ ತಾರಸಿಯನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡಿ.

   [**ಸುಳುಹು:** ಮೊದಲನೇ ಮೆಟ್ಟಿಲನ್ನು ಕಟ್ಟಲು ಬೇಕಾದ ಕಾಂಕ್ರೀಟ್‌ನ ಪ್ರಮಾಣ = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50 m^3$]

*ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಪರೀಕ್ಷೆ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಇಲ್ಲ

1.5 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿಯಾಗಿದ್ದು ಇದು ಮೊದಲನೇ ಪದವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ಪ್ರತಿ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ d ಯನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಅದರ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಈ ಸ್ಥಿರ ಸಂಖ್ಯೆ d ಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.
2. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪಟ್ಟಿ a_1, a_2, a_3 .... ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಾಗಬೇಕಾದರೆ $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$ ಇವುಗಳು ಒಂದೇ ಬೆಲೆ ಹೊಂದಿರಬೇಕು. ಅಂದರೆ $a_{k+1} - a_k$ ಯು k ಯ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು.
3. ಮೊದಲ ಪದ a, ಸಾಮಾನ್ಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸ d ಇರುವ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ nನೇ ಪದ (ಸಾಮಾನ್ಯ ಪದ)ವು $a_n = a + (n-1)d$ ಆಗಿದೆ.
4. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊದಲ n ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
5. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ n ನೇ ಪದ (ಕೊನೆಯಪದ) l ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಶ್ರೇಢಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತ = $S = \frac{n}{2}(a + l)$

ಓದುಗನಿಗೊಂದು ಸೂಚನೆ

a, b, c ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ $b = \frac{a+c}{2}$ ಮತ್ತು b ಯು a ಮತ್ತು c ಗಳ ನಡುವಿನ ಸಮಾಂತರ ಮಾಧ್ಯವಾಗಿದೆ.

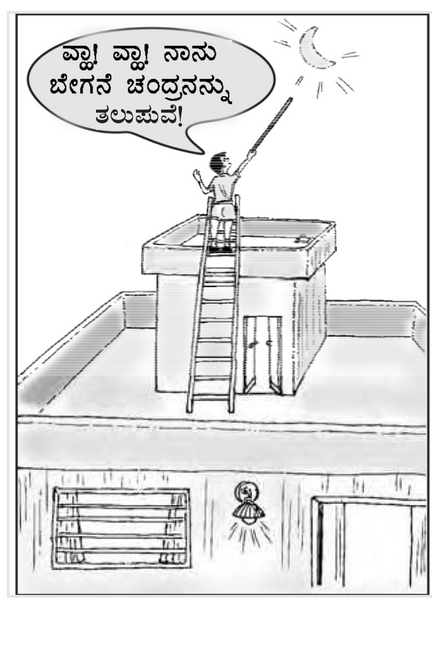
❀ ❀ ❀

ತ್ರಿಭುಜಗಳು 2

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹಲವು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ವಿಸ್ತಾರವಾಗಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ. ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅವುಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಗಾತ್ರವಿರಬೇಕೆಂಬುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಆಕಾರವಿರುವ ಆದರೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಕಲಿಯುವ. ಒಂದೇ ಆಕಾರವಿರುವ (ಆದರೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲದ) ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ವಿಶೇಷವಾಗಿ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸಿ ಅದರಿಂದ ಸಿಗುವ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಕಲಿತಿರುವ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಸರಳ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಪಡೆಯೋಣ.

ಅತೀ ಎತ್ತರದ ಪರ್ವತ (ಮೌಂಟ್ ಎವರೆಸ್ಟ್)ದ ಎತ್ತರವನ್ನು ಊಹೆ ಮಾಡಲು ನಿಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವೇ? ಅಥವಾ ಅತೀ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ವಸ್ತುಗಳ (ಚಂದ್ರ) ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಇವುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಪಟ್ಟಿಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ನೇರವಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡಬಹುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿರುವಿರಾ?

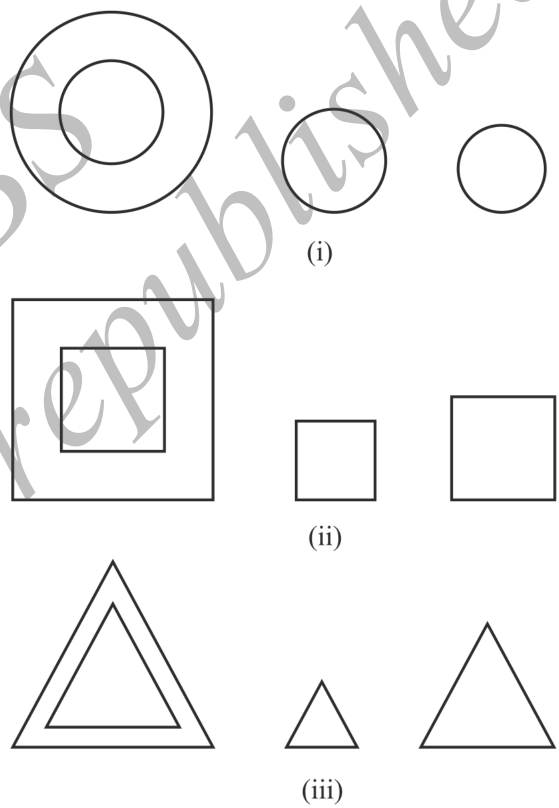


ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಈ ಎಲ್ಲಾ ದೂರಗಳನ್ನು ಆಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ತತ್ವದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಪರೋಕ್ಷ ಅಳತೆಗಳಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. (ಉದಾಹರಣೆ 7, ಅಭ್ಯಾಸ 2.3 ರ 15ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ ಮತ್ತು ಈ ಪುಸ್ತಕದ 11ನೇ ಮತ್ತು 12ನೇ ಅಧ್ಯಾಯಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ).

2.2 ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು

ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳು ಸರ್ವಸಮ, ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ. ಒಂದೇ ಇರುವ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಗಳು ಸರ್ವಸಮ, ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳು ಸಮವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ನೀವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿರುವಿರಿ.

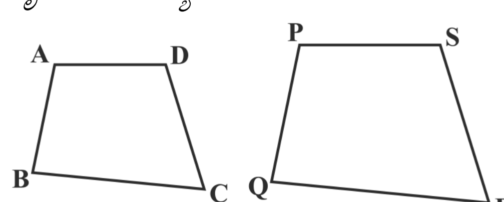
ಈಗ ಎರಡು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 2.1 (i)ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮವೇ? ಅವುಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ಆಗದಿರುವ ಕಾರಣ ಅವುಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ. ಕೆಲವು ಸರ್ವಸಮ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸರ್ವಸಮವಲ್ಲ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದರೆ ಅವುಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ಆಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವೆಲ್ಲವೂ ಸಮರೂಪಿಗಳು. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳಿಗೆ ಒಂದೇ ಆಕಾರವಿದೆ ಆದರೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು. ಎರಡು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ವರ್ಗಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಥವಾ ಎರಡು (ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು) ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಏನು ಹೇಳಬಹುದು? (ಚಿತ್ರ 2.1 (ii) ಮತ್ತು 2.1 (iii) ನ್ನು ನೋಡಿ). ವೃತ್ತಗಳ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಿದಂತೆ, ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು.



ಚಿತ್ರ 2.1

ಮೇಲಿನ ಸಂಗತಿಗಳಿಂದ *ಎಲ್ಲಾ ಸಮರೂಪಿ ಆಕೃತಿಗಳು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಸರ್ವಸಮವಾಗಬೇಕಿಲ್ಲ* ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮರೂಪಿಗಳೇ? ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಮರೂಪಿಗಳೇ? ಕೇವಲ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು



ಚಿತ್ರ 2.2

ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 2.1 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಈ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಲ್ಲ (ಏಕೆ?)

ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಾದ ABCD ಮತ್ತು PQRS ಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುತ್ತೀರಿ? (ಚಿತ್ರ 2.2 ನೋಡಿ) ಅವುಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳೇ? ಅವುಗಳು ಸಮರೂಪದಂತೆ ಕಂಡರೂ ನಾವು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಆಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಕೆಲವು ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳು ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿದ್ದು, ಈ ವ್ಯಾಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಆಧರಿಸಿರುವ ಕೆಲವು ನಿಯಮಗಳ ಸಹಾಯದಿಂದ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳೇ ಇಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅದಕ್ಕಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ಚಿತ್ರ 2.3 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಛಾಯಚಿತ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಚಿತ್ರ 2.3

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿದ್ದರೂ ಅವುಗಳ ಒಂದೇ ಸ್ಮಾರಕ (ತಾಜ್‌ಮಹಲ್)ದ ಛಾಯಾಚಿತ್ರಗಳೆಂದು ನೀವು ಕೂಡಲೇ ಹೇಳಬಹುದು. ಈ ಮೂರು ಛಾಯಾಚಿತ್ರಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಹುದೇ? ಹೌದು ಅವುಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು.

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯ 10 ನೇ ವಯಸ್ಸಿನ ಹಾಗೂ 40ನೇ ವಯಸ್ಸಿನ ಒಂದೇ ಅಳತೆಯ ಎರಡು ಭಾವಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? ಈ ಭಾವಚಿತ್ರಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳೇ? ಈ ಭಾವಚಿತ್ರಗಳು ಒಂದೇ ಅಳತೆ ಹೊಂದಿದ್ದರೂ ಖಂಡಿತವಾಗಿಯೂ ಒಂದೇ ಆಕಾರ ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಲ್ಲ.

ಒಂದೇ ಛಾಯಚಿತ್ರ ಋಣಪ್ರತಿಯಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಹಲವು ಪ್ರತಿಗಳನ್ನು ಮಾಡಲು ಛಾಯಚಿತ್ರಕಾರರು ಏನು ಮಾಡುತ್ತಾರೆ? ಸ್ಟ್ಯಾಂಪ್ ಅಳತೆ, ಪಾಸ್‌ಪೋರ್ಟ್ ಅಳತೆ ಹಾಗೂ ಅಂಚೆ ಕಾರ್ಡ್ ಅಳತೆಯ ಛಾಯಚಿತ್ರಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಕೇಳಿರಬಹುದು. ಅವರು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕ ಛಾಯಚಿತ್ರ ಪ್ರತಿ ಅಂದರೆ 35 mm ಗಾತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯಚಿತ್ರ ತೆಗೆದು ಅದನ್ನು ನಂತರ 45 mm (ಅಥವಾ 55 mm) ಗಾತ್ರಕ್ಕೆ ಹೆಚ್ಚಿಸುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗೆ ಚಿಕ್ಕ ಛಾಯಪ್ರತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ದೊಡ್ಡ ಛಾಯಪ್ರತಿಯಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾಖಂಡವು ಅದರ $\frac{45}{35}\left(\text{ಅಥವಾ } \frac{55}{35}\right)$ ರಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ. ಇದರ ನಿಜವಾದ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ ಚಿಕ್ಕ ಛಾಯಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾಖಂಡವು 35 : 45 (ಅಥವಾ 35 : 55) ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. (ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತದೆ) ಅಲ್ಲದೆ ದೊಡ್ಡ ಛಾಯಚಿತ್ರದಲ್ಲಿರುವ ಪ್ರತಿ ರೇಖಾಖಂಡವು 45 : 35 (ಅಥವಾ 55 : 35) ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕ ಛಾಯ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಕಡಿಮೆ ಆಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

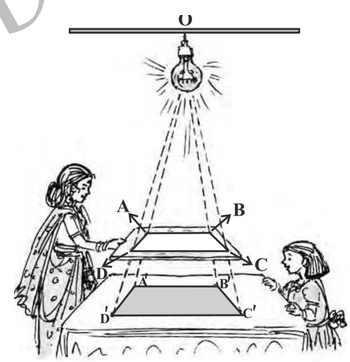
ಅದಲ್ಲದೆ ಎರಡು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಛಾಯಚಿತ್ರಗಳ ಅನುರೂಪ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ಜೊತೆಗಳ ನಡುವಿನ ಬಾಗುವಿಕೆ (ಅಥವಾ ಕೋನಗಳು) ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ವಿಶೇಷವಾಗಿ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆಗೆ ಪ್ರಮುಖವಾದ ಅಂಶವಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಹೇಳಬಹುದು:

ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಬೇಕಾದರೆ i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು. (ಅಥವಾ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರಬೇಕು)

ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತೀಯ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಭಾಗಪ್ರಮಾಣ (ಅಥವಾ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಭಿನ್ನರಾಶಿ)ಯಿಂದ ನಿರ್ದೇಶಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೂಢಿ ಮತ್ತು ಸೂಕ್ತವಾದ ಭಾಗಪ್ರಮಾಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಪ್ರಪಂಚದ (ಅಥವಾ ವಿಶ್ವ) ಭೂಪಟವನ್ನು ಮತ್ತು ಕಟ್ಟಡಗಳ ನೀಲ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ತಯಾರಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕೇಳಿರಬಹುದು.

ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1: ತರಗತಿಯ ಛಾವಣಿಯ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿದ್ಯುತ್ ಬಲ್ಬನ್ನು ಉರಿಸಿ ಅದರ ಕೆಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಬಲ್ಬಗೆ ನೇರವಾಗಿ ಒಂದು ಮೇಜನ್ನು ಇರಿಸಿ. ಒಂದು ಸಮತಟ್ಟಾದ ರಟ್ಟಿನಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ ಆ ರಟ್ಟನ್ನು ನೆಲಕ್ಕೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಬಲ್ಬ್ ಮತ್ತು ಮೇಜುಗಳ ನಡುವೆ ಇಡಬೇಕು. ಆಗ ABCD ಯ ನೆರಳು ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಬೀಳುತ್ತದೆ. ಈ ನೆರಳಿನ ಸೀಮಾರೇಖೆಯನ್ನು A'B'C'D' ಎಂದು ಗುರ್ತಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 2.4ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 2.4

A'B'C'D' ಚತುರ್ಭುಜವು ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವರ್ಧನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದು ಬೆಳಕಿನ ಕಿರಣದ ಸರಳರೇಖಾ ಪ್ರಸರಣ ಗುಣದಿಂದಾಗಿದೆ, ಹಾಗೇ A', OA ಯ ಮೇಲೆ, B', OB ಯ ಮೇಲೆ C', OC ಮತ್ತು D', OD ಯ ಮೇಲೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ A'B'C'D' ಮತ್ತು ABCD ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಆಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ A'B'C'D' ಚತುರ್ಭುಜವು ABCD ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ABCD ಚತುರ್ಭುಜವು A'B'C'D' ಚತುರ್ಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆಯೆಂದು ಕೂಡಾ ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು.

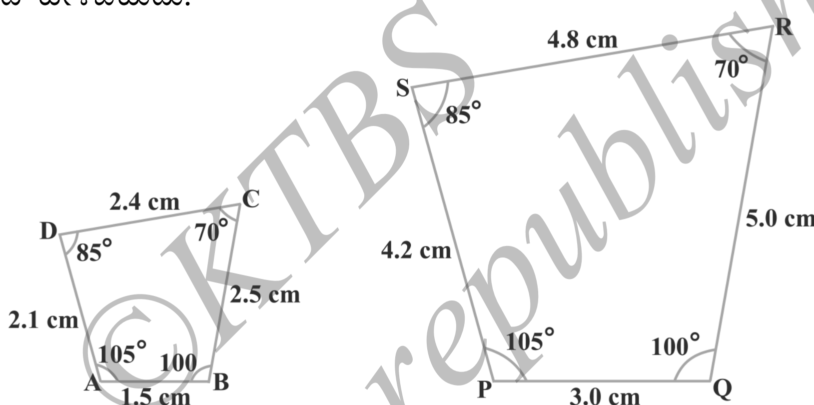
A' ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗ A, B' ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಶೃಂಗ B, C' ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗ C ಮತ್ತು D' ಶೃಂಗಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪವಾದ ಶೃಂಗ D ಎಂದು ನೀವು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಈ ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ ಮತ್ತು $D' \leftrightarrow D$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನೀವು ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ ಮತ್ತು

ii) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'}$

ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ i) ಎಲ್ಲಾ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾದರೆ ಮತ್ತು ii) ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ (ಅಥವಾ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ) ಆ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಇದು ದೃಢೀಕರಿಸುತ್ತದೆ.

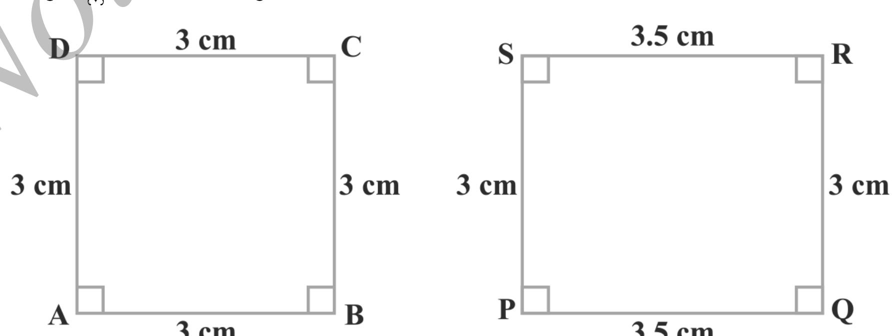
ಚಿತ್ರ 2.5 ರಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಮತ್ತು PQRS ಗಳು ಸಪರೂಪಿಗಳು ಎಂದು ಮೇಲಿನ ನಿಯಮದಿಂದ ಹೇಳಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 2.5

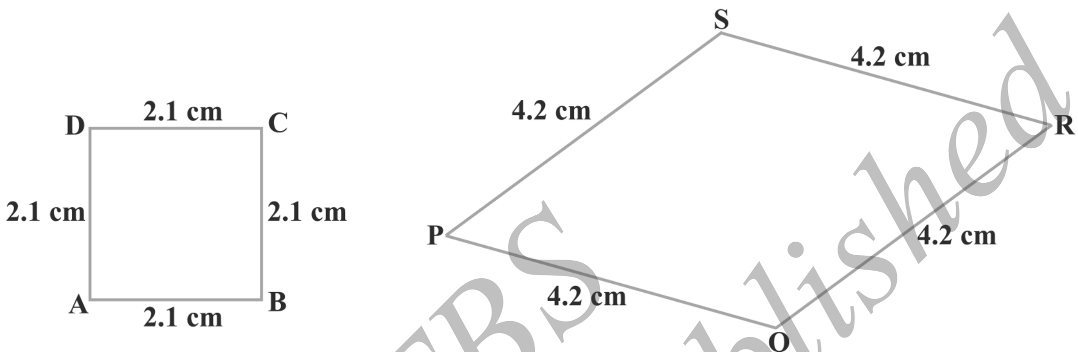
ಗಮನಿಸಿ: ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಮತ್ತೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ. ಈ ಎರಡನೇ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಮೂರನೇ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ. ಆಗ ಮೊದಲನೇ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯು ಮೂರನೇ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನೀವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 2.6 ರಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜ (ಒಂದು ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಒಂದು ಆಯತ) ಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿವೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 2.6

ಆದ್ದರಿಂದ ಆ ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ ಚಿತ್ರ 2.7 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಚತುರ್ಭುಜಗಳಲ್ಲಿ (ಒಂದು ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿ) ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಪುನಃ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು (ಚತುರ್ಭುಜಗಳು) ಸಮರೂಪವಲ್ಲ.

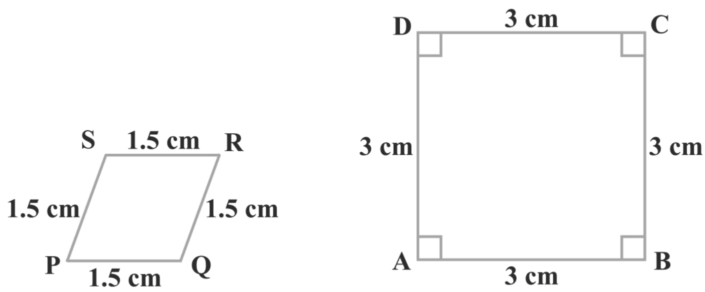


ಚಿತ್ರ 2.7

ಮೇಲಿನ ಎರಡು ನಿಯಮಗಳು (i) ಮತ್ತು (ii) ರಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದರಿಂದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ಸಮರೂಪತೆ ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಅವರಣದಲ್ಲಿ ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಪದಗಳಿಂದ ಸೂಕ್ತವಾದ ಪದವನ್ನು ಆರಿಸಿ ಬಿಟ್ಟ ಪದ ತುಂಬಿಸಿ
   i) ಎಲ್ಲಾ ವೃತ್ತಗಳು ___________ (ಸರ್ವಸಮ, ಸಮರೂಪ)
   ii) ಎಲ್ಲಾ ವರ್ಗಗಳು ___________ (ಸಮರೂಪ, ಸರ್ವಸಮ)
   iii) ಎಲ್ಲಾ ___________ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪ (ಸಮದ್ವಿಬಾಹು, ಸಮಬಾಹು)
   iv) ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಬೇಕಾದರೆ a) ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ___________ ಮತ್ತು b) ಅದರ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ___________ (ಸಮ, ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ)
2. ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಕೊಡಿ.
   i) ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು
   ii) ಒಂದು ಜೊತೆ ಸಮರೂಪವಲ್ಲದ ಆಕೃತಿಗಳು
3. ಕೆಳಗಿನ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವೇ? ಇಲ್ಲವೆ ತಿಳಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.8

2.3 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ?

ತ್ರಿಭುಜವೂ ಕೂಡಾ ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ನಿಯಮಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಬಹುದು ಅವುಗಳು:

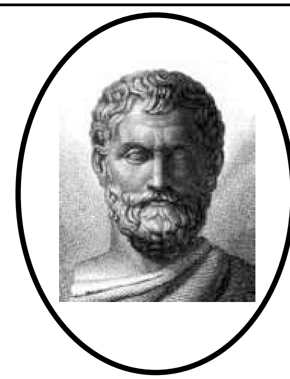
ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಬೇಕಾದರೆ:

i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು

ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ (ಸಮಾನುಪಾತ) ವಾಗಿರಬೇಕು.

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಎರಡು ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಗ್ರೀಕ್‌ನ ಪ್ರಖ್ಯಾತ ಗಣಿತಜ್ಞನಾದ ಥೇಲ್ಸ್ ಒಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸತ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಹೇಳಿರುತ್ತಾರೆ ಅದು ಹೀಗಿದೆ.

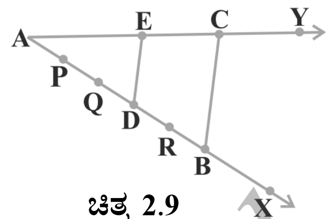
ಎರಡು ಸಮಕೋನೀಯ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು ಯಾವಾಗಲೂ ಒಂದೇ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.



ಥೇಲ್ಸ್
ಕ್ರಿ.ಪೂ (640 – 546)

ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಅವರು **ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ** (ಈಗ ಅದನ್ನು **ಥೇಲ್ಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ) ದ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದಾರೆ ಎಂದು ನಂಬಲಾಗಿದೆ.

ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ:



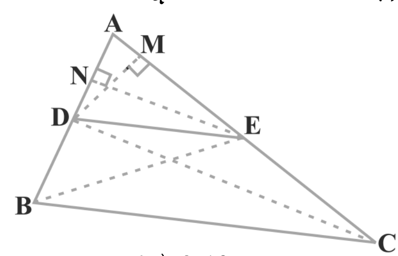
ಚಿತ್ರ 2.9

ಚಟುವಟಿಕೆ 2: $\angle XAY$ ಯನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಒಂದು ಬಾಹು AX ಮೇಲೆ AP = PQ = QD = DR = RB ಆಗುವಂತೆ P, Q, D,R ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

ಈಗ Bನಿಂದ AYಯನ್ನು Cನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 2.9 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಹಾಗೆಯೇ ಬಿಂದು D ನಿಂದ BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಮತ್ತು AC ಯನ್ನು E ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನಿಮ್ಮ ರಚನೆಯಿಂದ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? AE ಮತ್ತು EC ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. $\frac{AE}{EC}$ =? $\frac{AE}{EC}$ ಕೂಡಾ $\frac{3}{2}$ ಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಹಾಗಾದರೆ ΔABC ಯಲ್ಲಿ $DE \parallel BC$ ಮತ್ತು $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದು ಕಾಕತಾಳೀಯವೇ? ಇಲ್ಲ ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಪ್ರಮೇಯ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯ):

ಪ್ರಮೇಯ 2.1

ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.10

ಸಾಧನೆ: ΔABC ಯಲ್ಲಿ BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು AB ಮತ್ತು AC ಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿವೆ (ಚಿತ್ರ 2.10 ನೋಡಿ)

ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿರುವುದು $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, BE ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಮತ್ತು $DM \perp AC$ ಮತ್ತು $EN \perp AB$ ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಈಗ; ΔADE ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (=$\frac{1}{2}$ ಪಾದ × ಎತ್ತರ) = $\frac{1}{2} \times AD \times EN$

ΔADE ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ವಿ(ADE) ಎಂದು ಸೂಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು IXನೇ ತರಗತಿಯಿಂದ ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ(ADE) = $\frac{1}{2} \times AD \times EN$

ಆದೇ ರೀತಿ ವಿ(BDE) = $\frac{1}{2} \times DB \times EN$

$$ವಿ(ADE) = \frac{1}{2} \times AE \times DM \text{ ಮತ್ತು}$$

$$ವಿ(DEC) = \frac{1}{2} \times EC \times DM.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{ವಿ(\Delta ADE)}{ವಿ(\Delta BDE)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times AD \times \cancel{EN}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times DB \times \cancel{EN}} = \frac{AD}{DB}$ (1)

ಮತ್ತು $\frac{ವಿ(\Delta ADE)}{ವಿ(\Delta CED)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times AE \times \cancel{DM}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times EC \times \cancel{DM}} = \frac{AE}{EC}$ (2)

ΔBDE ಮತ್ತು DEC ಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ DF ಮತ್ತು $BC \parallel DE$ ರೇಖೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ವಿ(ΔBDE) = ವಿ(ΔDEC) (3)

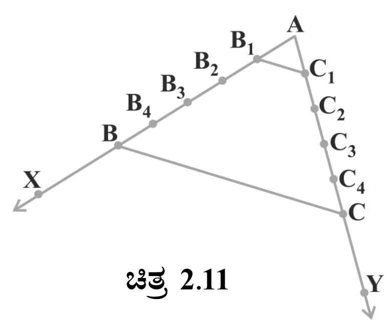
ಆದ್ದರಿಂದ (1), (2) ಮತ್ತು 3 ರಿಂದ

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯೆ? (ವಿಲೋಮದ ಅರ್ಥವನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಅನುಬಂಧ 1ನ್ನು ನೋಡಿ) ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 3: ನಿಮ್ಮ ನೋಟ್ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ $\angle XAY$ ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ ಆಗುವಂತೆ AX ಕಿರಣದ ಮೇಲೆ B_1, B_2, B_3 ಮತ್ತು B_4 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ.

ಹಾಗೆಯೇ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ ಆಗುವಂತೆ AC ಕಿರಣದ C_1, C_2, C_3, C_4 ಮೇಲೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು B_1C_1 ಹಾಗೂ BC ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು (ಚಿತ್ರ 2.11 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 2.11

$\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\frac{1}{4}$ ಕ್ಕೆ ಸಮ) ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ

B_1C_1 ಮತ್ತು BC ಗಳು ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ,

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

ಹಾಗೆಯೇ B_2C_2, B_3C_3 ಮತ್ತು B_4C_4 ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ

ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 1: ಒಂದೇ ಅಂಶಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಅಂಶಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ.

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C} = \frac{2}{3} \text{ ಮತ್ತು } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C} = \frac{3}{2} \text{ ಮತ್ತು } B_3C_3 \parallel BC \qquad (3)$$

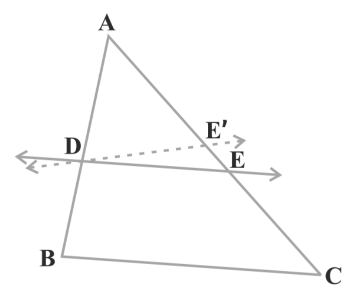
$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C} = \frac{4}{1} \text{ ಮತ್ತು } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. (1), (2), (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮನಾದ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$\underline{|XAY}$ ಯ ಅಳತೆ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಇರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಬಾಹು AX ಮೇಲೆ ಮಾಡಿದ ಸಮಭಾಗಗಳಷ್ಟೇ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಬಾಹು AY ಮೇಲೆ ಮಾಡಿಕೊಂಡು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ನೀವು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ಸಲ ನೀವು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಪಡೆಯುವಿರಿ. ಹೀಗೆ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದೇವೆ ಇದು ಪ್ರಮೇಯ 2.1 ರ ವಿಲೋಮವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.2: *ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಅದರ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.*

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ಆಗುವಂತೆ ಮತ್ತು DE ಯು BC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಲ್ಲವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ DE ರೇಖೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 2.12 ನ್ನು ನೋಡಿ).



ಚಿತ್ರ 2.12

DE ಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲವಾದರೆ, $DE' \parallel BC$ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ಏಕೆ?)

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗೂ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ E ಮತ್ತು E'ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು (ಏಕೆ?)

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ವಿವರಿಸಲು ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ΔABC ಯ AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯು BC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದ್ದರೆ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (ಚಿತ್ರ 2.13 ನೋಡಿ) ಎಂದು

ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $DE \parallel BC$ ($\because$ ದತ್ತ)

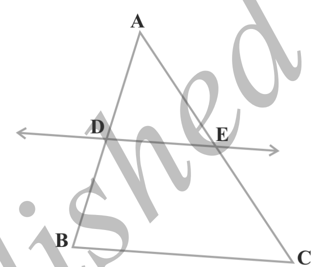
ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.1)

$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$ ($\because$ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ)

$\frac{DB}{AD}+1 = \frac{EC}{AE}+1$

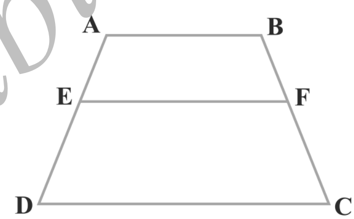
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

$\therefore$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ($\because$ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮಗೊಳಿಸಿದಾಗ)



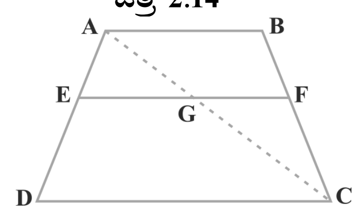
ಚಿತ್ರ 2.13

ಉದಾಹರಣೆ 2: ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ $AB \parallel DC$, $EF \parallel AB$ ಆಗುವಂತೆ E ಮತ್ತು F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಬಾಹುಗಳಾದ AD ಮತ್ತು BC ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು (ಚಿತ್ರ 2.14 ನೋಡಿ) $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.14

ಪರಿಹಾರ: AC ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅದು EF ನ್ನು G ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. (ಚಿತ್ರ 2.15 ನೋಡಿ) $AB \parallel DC$ ಮತ್ತು $EF \parallel AB$ ($\because$ ದತ್ತ) ಆದ್ದರಿಂದ $EF \parallel DC$ ($\because$ ಒಂದೇ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ರೇಖೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನಾಂತರ)



ಚಿತ್ರ 2.15

ಈಗ ΔADC ಯಲ್ಲಿ

$EG \parallel DC$ ($\because$ $EF \parallel DC$)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.1) (1)

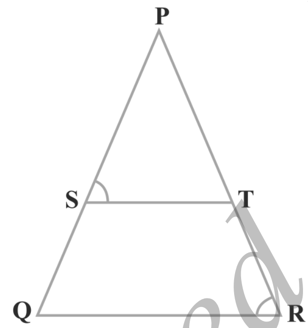
ಹಾಗಯೇ ΔCAB ನಲ್ಲಿ

$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$

ಅಂದರೆ $\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC}$ (2)

ಆದ್ದರಿಂದ (1), (2) ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ (1) ರಿಂದ

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$



ಚಿತ್ರ 2.16

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಚಿತ್ರ 2.16 ರಲ್ಲಿ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ಮತ್ತು $\angle PST = \angle PRQ$ ಆದರೆ ΔPQR ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ($\because$ ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $ST \parallel QR$ ($\because$ ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle PST = \angle PQR$ ($\because$ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು) (1)

ಆದರೆ $\angle PST = \angle PRQ$ ($\because$ ದತ್ತ) (2)

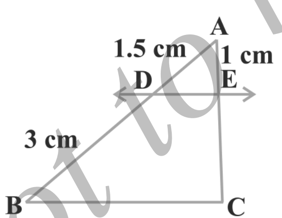
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle PRQ = \angle PQR$ ($\because$ (1), (2) ಮತ್ತು ಸ್ವಯಂಸಿದ್ಧ (1) ರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ PQ = PR ($\because$ ಸಮವಾದ ಕೋನಗಳಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾದ ಬಾಹುಗಳು ಸಮ)

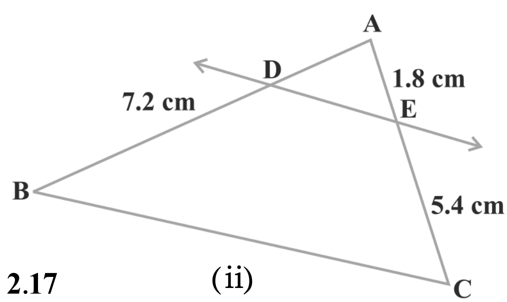
ಅಂದರೆ ΔPQR ಇದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. ಚಿತ್ರ 2.17 ರ (i) ಮತ್ತು (ii) ರಲ್ಲಿ $DE \parallel BC$ ಆದರೆ (i) ರಲ್ಲಿ EC (ii) ರಲ್ಲಿ AD ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



(i)



(ii)

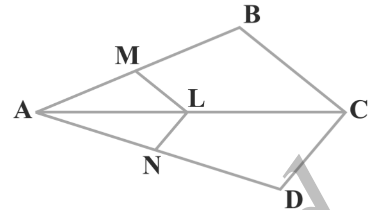
ಚಿತ್ರ 2.17

2. E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನ PQ ಮತ್ತು PR ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ $EF \parallel QR$ ಆಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

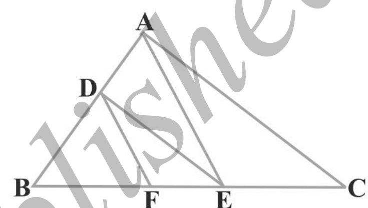
(i) PE = 3.9cm EQ = 3cm PF = 3.6cm FR = 2.4cm

(ii) PE = 4cm QE = 4.5cm PF = 8cm RF = 9cm

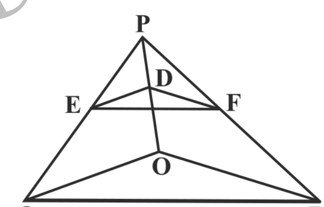
(iii) PQ = 1.28cm PR = 2.56cm PE = 0.18cm PF = 0.36cm



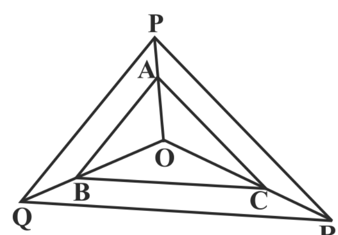
ಚಿತ್ರ 2.18



ಚಿತ್ರ 2.19



ಚಿತ್ರ 2.20



ಚಿತ್ರ 2.21

3. ಚಿತ್ರ 2.18 ರಲ್ಲಿ LM ∥ CB ಮತ್ತು LN ∥ CD ಆದರೆ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4. ಚಿತ್ರ 2.19 ರಲ್ಲಿ DE ∥ AC ಮತ್ತು DF ∥ AE ಆದರೆ $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

5. ಚಿತ್ರ 2.20 ಯಲ್ಲಿ DE ∥ OQ ಮತ್ತು DF ∥ OR ಆದರೆ EF ∥ QR ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ಚಿತ್ರ 2.21 ರಲ್ಲಿ AB ∥ PQ ಮತ್ತು AC ∥ PR ಆಗುವಂತೆ A, B ಮತ್ತು C ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ OP, OQ ಮತ್ತು OR ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು. ಆದರೆ BC ∥ QR ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

7. ತಿಭುಜದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ಸರಳರೇಖೆಯು ಅದರ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 2.1 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ (ನೀವು ಇದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದ್ದೀರಿ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)

8. ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮದ್ಯ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಯು ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಪ್ರಮೇಯ 2.2 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸಾಧಿಸಿ (ನೀವು ಇದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿರುವಿರಿ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ)

9. ABCD ಯು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಇದರಲ್ಲಿ AB ∥ DC ಮತ್ತು ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

10. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ಆಗುವಂತೆ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ ABCD ಯು ಒಂದು ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2.4 ತ್ರಿಭುಜಗಳ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳು

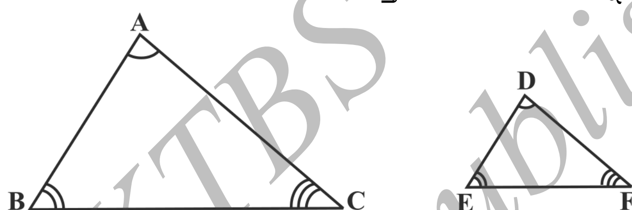
ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪ ವಾಗಬೇಕಾದರೆ *(i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು (ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ನಾವು ನಿರೂಪಿಸಿದ್ದೇವೆ.*

ಅಂದರೆ ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ

(i) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ಮತ್ತು

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ಆದರೆ

ಆಗ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 2.22 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 2.22

ಇಲ್ಲಿ $\angle A$ ಗೆ ಅನುರೂಪ $\angle D$, $\angle B$ ಗೆ ಅನುರೂಪ $\angle E$ ಮತ್ತು $\angle C$ ಗೆ ಅನುರೂಪ $\angle F$ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು ΔABC ಸಮರೂಪ ΔDEF ಎಂದು ಓದುತ್ತೇವೆ.

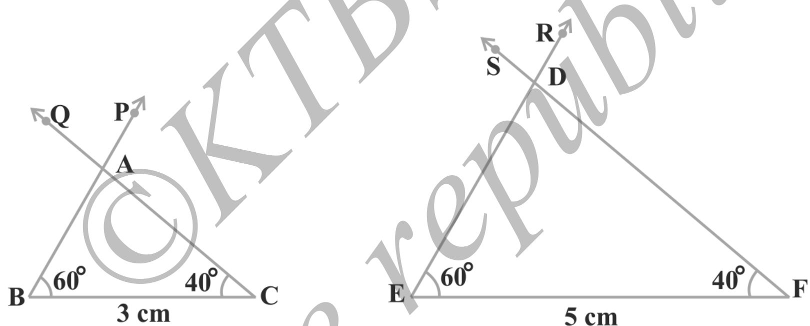
ಸಂಕೇತ **'~' ಸಮರೂಪ** ಎಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. **ಸರ್ವಸಮತೆಗೆ '≅'** ಎಂಬ ಸಂಕೇತವನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೇನೆಂದರೆ ಸರ್ವಸಮ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಹೆಸರಿಸಿದಂತೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಸೂಚಿಸುವಾಗ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಸೂಚಿಸಬೇಕು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಚಿತ್ರ 2.22 ರಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು ತ್ರಿಭುಜ DEF ಗಳನ್ನು $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ ಅಥವಾ $\Delta ABC \sim \Delta FED$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬಾರದು ಅದಾಗ್ಯೂ $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆಯಬೇಕು.

ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ನಾವು ಯಾವಾಗಲೂ ಎಲ್ಲಾ ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸಮತೆಯನ್ನು ನೋಡಬೇಕೇ? ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) ಮತ್ತು ಎಲ್ಲಾ ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳ ಸಮತೆಯನ್ನು $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}\right)$ ನೋಡಬೇಕೇ? ಎಂಬುವುದು ಈಗ ಎದ್ದಿರುವ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಪ್ರಶ್ನೆಯಾಗಿದೆ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ. 9ನೇ

ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ ಕೇವಲ ಮೂರು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳನ್ನು (ಅಥವಾ ಅಂಶಗಳನ್ನು) ಸೇರಿಸಿ ಸಿಗುವ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಇಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವಾಗ ಆರು ಜೊತೆ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳ ಸಂಬಂಧ ತಿಳಿಯುವ ಬದಲು ಕನಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುರೂಪ ಭಾಗಗಳ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದು ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುವ ಪ್ರಯತ್ನ ಮಾಡೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 4: BC ಮತ್ತು EF ಎಂಬ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಅಳತೆಯ ಎರಡು ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಅವುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 3cm ಮತ್ತು 5cm ಆಗಿರಲಿ. B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕ್ರಮವಾಗಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅಳತೆಯ $\angle PBC$ ಮತ್ತು $\angle QCB$ ರಚಿಸಿ ಅದು 60° ಮತ್ತು 40° ಆಗಿರಲಿ. ಹಾಗೆಯೇ E ಮತ್ತು F ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ $\angle REF$ ಮತ್ತು $\angle SFE$ ರಚಿಸಿ ಅವುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 60° ಮತ್ತು 40° ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 2.23 ನ್ನು ನೋಡಿ)

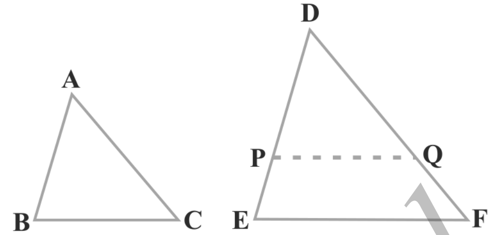


ಚಿತ್ರ 2.23

BP ಮತ್ತು CQ ಕಿರಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ER ಮತ್ತು FS ಕಿರಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ D ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ. ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ಮತ್ತು $\angle A = \angle D$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಈ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ. ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವೇನು ಹೇಳುವಿರಿ? $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದರೆ $\frac{AB}{DE}$ ಮತ್ತು $\frac{CA}{FD}$ =? AB, DE, CA ಮತ್ತು FD ಗಳನ್ನು ಅಳೆಯುವುದರಿಂದ $\frac{AB}{DE}$ ಮತ್ತು $\frac{CA}{FD}$ ಗಳು ಕೂಡಾ 0.6 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. (ಅಥವಾ ಅಳತೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ದೋಷವಿದ್ದಲ್ಲಿ 0.6 ಕ್ಕೆ ಸಮೀಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ) ಹೀಗೆ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾಗಿರುವ ಹಲವು ಜೊತೆ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿ ಸಲ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ ಅಥವಾ ಸಮಾನುಪಾತ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ

ಬಗ್ಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.3: *ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಗಳು ಸಮ (ಅಥವಾ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ) ಅದ್ದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.*



ಚಿತ್ರ 2.24

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು **ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೋನ – ಕೋನ – ಕೋನ (ಕೋ. ಕೋ. ಕೋ) ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ** ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ. (ಅಥವಾ **AAA ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ**)

ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ ಆಗುವಂತೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 2.24 ನ್ನು ನೋಡಿ)

$DP = AB$ ಮತ್ತು $DQ = AC$ ಆಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ PQ ವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಏಕೆ?)

ಇದರಿಂದ $\angle B = \angle P = \angle E$ ಮತ್ತು $PQ \parallel EF$ (ಹೇಗೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{DP}{PE} = \dfrac{DQ}{QF}$ (ಏಕೆ?)

ಅಂದರೆ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ (ಏಕೆ?)

ಅದೇ ರೀತಿ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$

ಅಂದರೆ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಗಮನಿಸಿ: *ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ, ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣದಿಂದ 3ನೇ ಕೋನಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಹೀಗೆ ಕೂಡಾ ಹೇಳಬಹುದು.*

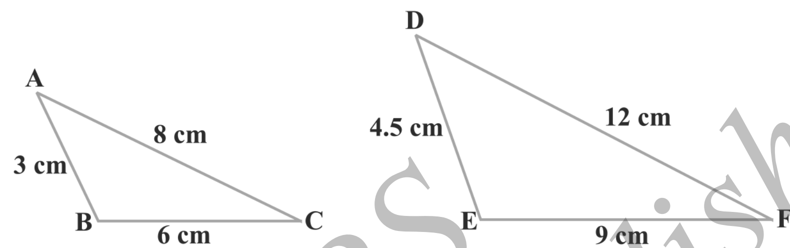
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಇದನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಕೋ.ಕೋ. ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ (A.A ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ) ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮವಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. (ಅಂದರೆ ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ). ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮ ಹೇಳಿಕೆ ಏನು? ಇದರ ವಿಲೋಮ ನಿಜವೇ? ಅಥವಾ

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇನ್ನೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆಯೇ? ಇದನ್ನು ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮುಖಾಂತರ ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 5: AB = 3cm, BC = 6cm, CA = 8cm, DE = 4.5cm, EF = 9cm ಮತ್ತು FD = 12cm ಇರುವಂತೆ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಮತ್ತು DEF ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 2.25 ನ್ನು ನೋಡಿ)



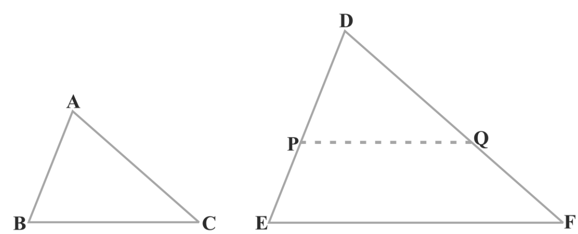
ಚಿತ್ರ 2.25

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿಮಗೆ: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\frac{2}{3}$ ಕ್ಕೆ ಸಮ)

ಈಗ, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$, ಮತ್ತು $\angle F$ ಗಳನ್ನು ಅಳೆದಾಗ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಅಂದರೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ.

ನೀವು ಇಂತಹ ಹಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು (ಅವುಗಳ ಬಾಹುಗಳು ಒಂದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವಂತೆ) ರಚಿಸಿ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಎಲ್ಲಾ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡುತ್ತೀರಿ ಇದಕ್ಕೆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವೇ ಕಾರಣವಾಗಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.4: *ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರು ಬಾಹುಗಳೊಡನೆ ಸಮಾನುಪಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ (ಅಂದರೆ ಅನುಪಾತ ಒಂದೇ ಆದರೆ) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಅದರಿಂದಾಗಿ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.*



ಚಿತ್ರ 2.26

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಬಾಹು–ಬಾಹು–ಬಾಹು (S.S.S) ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗಿದೆ.

ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (<1) ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ

ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು. (ಚಿತ್ರ 2.26 ನ್ನು ನೋಡಿ)

DP = AB ಮತ್ತು DQ = AC ಆಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ PQ ವನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು.

$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ ಮತ್ತು $PQ \parallel EF$ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು (ಹೇಗೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle P = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle Q = \angle F$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

ಆದರೆ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ಏಕೆ?)

ಆದರೆ BC = PQ (ಏಕೆ?)

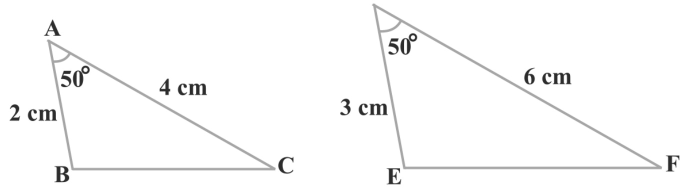
ಹೀಗೆ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ (ಹೇಗೆ?)

ಗಮನಿಸಿ: ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳಲ್ಲಿ i) ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ ಮತ್ತು ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ ಈ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೊಂದ–ರಿಂದ ಅವುಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಏನೇ ಅದರೂ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ ಹೇಳಬೇಕಾದರೆ ಈ ಎರಡೂ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿರುವುದಿಲ್ಲ. ಆ ಎರಡು ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸರಿ ಹೊಂದಿದರೆ ಅದು ಮತ್ತೊಂದು ಕೂಡಾ ಸರಿ ಹೊಂದುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರಮೇಯ 2.3 ಮತ್ತು 2.4 ರ ಆಧಾರದಿಂದ ಹೇಳಬಹುದು.

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ಬಗ್ಗೆ 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ವಿವಿಧ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಈಗ ನಾವು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಬಾಹು–ಬಾಹು–ಬಾಹು ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಬಾಹು–ಬಾಹು–ಬಾಹು ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಬಹುದು. ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಇದು ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸರ್ವಸಮತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಕ್ಕೆ ಹೋಲಿಕೆಯಾಗಿರುವ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಹುಡುಕಲು ನಮಗೆ ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವೊಂದು ಚಟುವಟಿಕೆ ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 6: AB = 2cm, $\angle A = 50^{O}$, AC = 4cm, DE = 3cm $\angle D = 50^{O}$ ಮತ್ತು DF = 6cm ಇರುವಂತೆ ABC ಮತ್ತು DEF ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 2.27 ನ್ನು ನೋಡಿ)



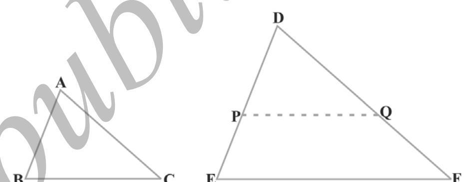
ಚಿತ್ರ 2.27

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\frac{2}{3}$ ಕ್ಕೆ ಸಮ) ಎಂದು ಇಲ್ಲಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು $\angle A$ (AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ) = $\angle D$ (DE ಮತ್ತು DF ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ). ಅಂದರೆ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ (ಅಂದರೆ ಸಮಾನುಪಾತ). ಈಗ $\angle B$, $\angle C$, $\angle E$ ಮತ್ತು $\angle F$ ಗಳನ್ನು ನಾವು ಅಳೆಯೋಣ.

$\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ ಎಂದು ನೀವು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಅಂದರೆ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle F$ ಆದ್ದರಿಂದ ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದಿಂದ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಆ ಕೋನಗಳಗಳನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತ ಹೊಂದಿರುವಂತೆ ಹಲವು ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಪ್ರತಿಸಲ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು ಎಂದು ನೀವು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಇದು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಈ ಕೆಳಗಿನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಹೇಳುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.5: *ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು ಆ ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡಿರುವ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.*

ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಕ್ಕೆ ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ (S.A.S) ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಎಂದು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.28

ಹಿಂದಿನಂತೆ ΔABC ಮತ್ತು ΔDEF ಗಳಲ್ಲಿ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) ಮತ್ತು $\angle A = \angle D$ ಆಗುವಂತೆ (ಚಿತ್ರ 2.28 ನ್ನು ನೋಡಿ) ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

DP = AB, DQ = AC ಆಗುವಂತೆ ಕತ್ತರಿಸಿ PQ ವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ.

ಈಗ $PQ \parallel EF$ ಮತ್ತು $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ಹೇಗೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle Q$

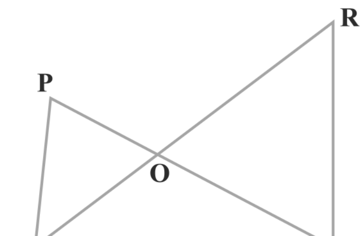
ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ಏಕೆ?)

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳ ಉಪಯೋಗದ ನಿದರ್ಶಣೆಗಾಗಿ ನಾವೀಗ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚಿತ್ರ 2.29 ರಲ್ಲಿ $PQ \parallel RS$ ಆದರೆ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $PQ \parallel RS$ ($\because$ ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle P = \angle S$ ($\because$ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)



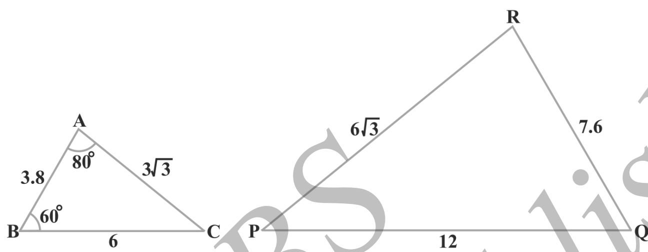
ಚಿತ್ರ 2.29

ಮತ್ತು $\angle Q = \angle R$ ($\because$ ಪರ್ಯಾಯ ಕೋನಗಳು)

ಮತ್ತು $\angle POQ = \angle SOR$ ($\because$ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ ($\because$ ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಚಿತ್ರ 2.30 ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ $\angle P$ ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ



ಚಿತ್ರ 2.30

ಪರಿಹಾರ: ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ಮತ್ತು $$\frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

ಅಂದರೆ $$\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ ($\because$ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

$\therefore$ $\angle C = \angle P$ ($\because$ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

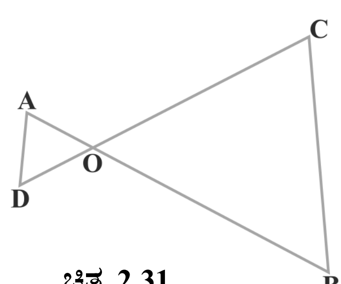
ಆದರೆ $\angle C = 180^{O} - \angle A - \angle B$ (ಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತದ ಗುಣಲಕ್ಷಣ)

$= 180^{O} - 80^{O} - 60^{O}$

$= 40^{O}$

ಹೀಗೆ $\angle P = 40^{O}$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚಿತ್ರ 2.31 ರಲ್ಲಿ $OA.OB = OC.OD$ ಆದರೆ $\angle A = \angle C$ ಮತ್ತು $\angle B = \angle D$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.31

ಪರಿಹಾರ: $OA.OB = OC.OD$ (ದತ್ತ)

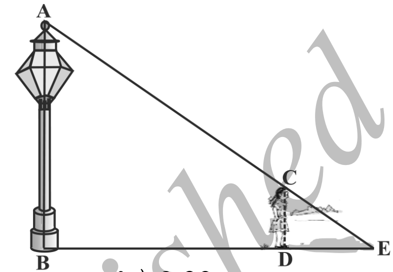
ಹಾಗೆ $$\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \quad (1)$$

ಹಾಗೂ $\angle AOD = \angle COB$ ($\because$ ಶೃಂಗಾಭಿಮುಖ ಕೋನಗಳು) (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ $\Delta AOD \sim \Delta COB$ ($\because$ ಸಮರೂಪತೆಯ SAS ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಹೀಗೆ $\angle A = \angle C$ ಮತ್ತು $\angle D = \angle B$ ($\because$ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

ಉದಾಹರಣೆ 7: 90cm ಎತ್ತರವಿರುವ ಹುಡುಗಿಯೊಬ್ಬಳು 1.2m/s ಜವದಲ್ಲಿ ಒಂದು ದೀಪದ ಕಂಬವೊಂದರ ಬುಡದಿಂದ ಹೊರ ನಡೆಯುತ್ತಿದ್ದಾಳೆ. ದೀಪವು ನೆಲದಿಂದ 3.6m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ 4 ಸೆಕೆಂಡ್‌ಗಳ ನಂತರ ಅವಳ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದವೇನು?



ಚಿತ್ರ 2.32

ಪರಿಹಾರ: AB ದೀಪದ ಕಂಬವಾಗಿರಲಿ ಹುಡುಗಿಯ ಎತ್ತರ CD ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 2.32 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಚಿತ್ರದಿಂದ DE ಯು ಹುಡುಗಿಯ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. DE = x m ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ, BD = 1.2m × 4 = 4.8m

ಗಮನಿಸಿ: ΔABE ಮತ್ತು ΔCDE ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle D$ (ಪ್ರತಿಯೊಂದು 90° ಆಗಿದೆ. ಕಂಬ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿ ಇಬ್ಬರೂ ನೆಲಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ ನಿಂತಿದ್ದಾರೆ)

ಮತ್ತು $\angle E = \angle E$ ($\because$ ಒಂದೇ ಕೋನಗಳು)

ಹಾಗೆ $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ ($\because$ ಸಮರೂಪತೆಯ AA ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

$\therefore \quad \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$

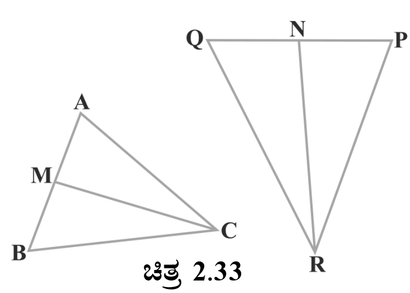
ಅಂದರೆ, $\frac{4.8+x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ ($\because$ 90m = $\frac{90}{100}$ m = 0.9m)

ಅಂದರೆ, $4.8+x = 4x$

ಅಂದರೆ, $3x = 4.8$

ಅಂದರೆ, $x = 1.6$

ಹೀಗೆ 4 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಡಿಗೆಯ ನಂತರ ಹುಡುಗಿಯ ನೆರಳಿನ ಉದ್ದ 1.6m



ಚಿತ್ರ 2.33

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಚಿತ್ರ 2.33 ರಲ್ಲಿ CM ಮತ್ತು RN ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಆದರೆ

i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ಹೀಗೆ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

ಮತ್ತು $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ ಮತ್ತು $\angle C = \angle R$ (2)

ಆದರೆ $AB = 2AM$ ಮತ್ತು $PQ = 2PN$ ($\because$ CM ಮತ್ತು RN ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾದ ಕಾರಣ)

ಹೀಗೆ $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

ಅಂದರೆ $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

ಅಲ್ಲದೇ $\angle MAC = \angle NPR$ ($\because$ (2) ರಿಂದ) (4)

ಹೀಗೆ (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ ($\because$ SAS ಸಮರೂಪ ನಿರ್ಧಾರಕಗುಣ) (5)

ii) (5) ರಿಂದ $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

ಆದರೆ $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ ($\because$ (2) ರಿಂದ) (7)

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ ($\because$ (6) ಮತ್ತು (7) ರಿಂದ) (8)

iii) ಪುನಃ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ (1 ರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ ($\because$ (8) ಮತ್ತು (9) ರಿಂದ)

ಹಾಗೂ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2BM}{2QN}$

ಅಂದರೆ $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

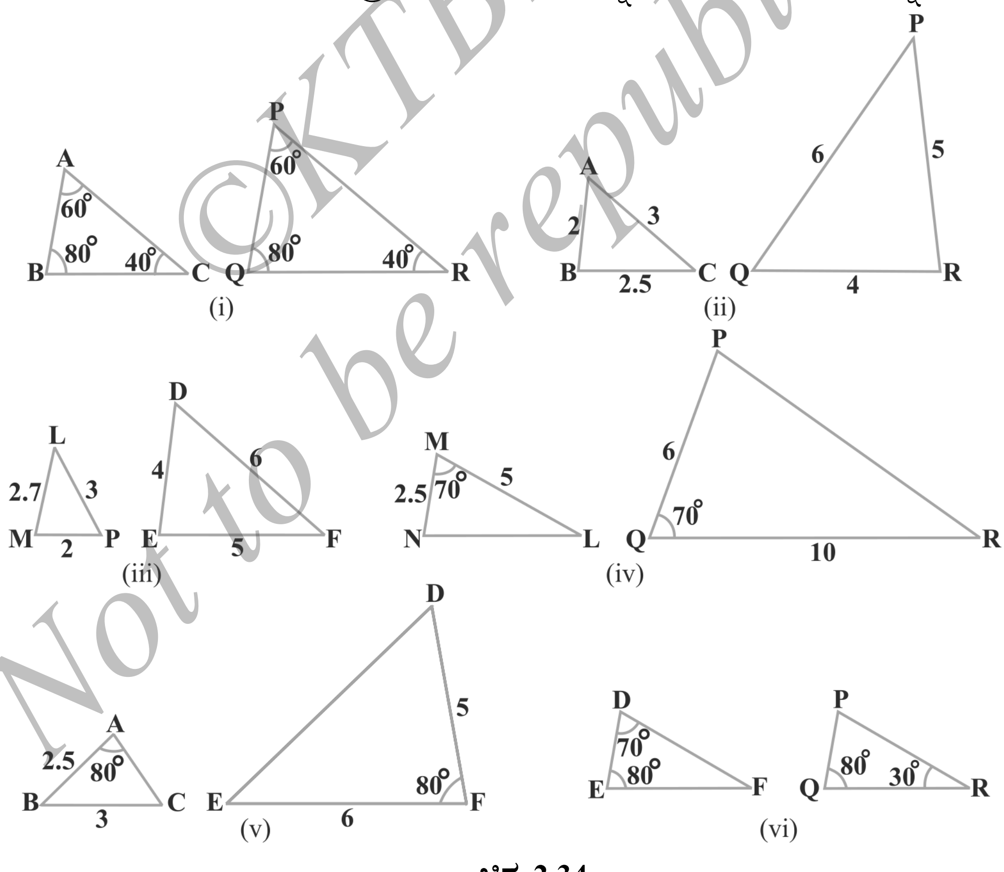
ಅಂದರೆ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ ($\because$ (9) ಮತ್ತು (10) ರಿಂದ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ ($\because$ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ ಸಮರೂಪತೆ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಗಮನಿಸಿ: i) ನೇ ಭಾಗವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾ ನೀವು ಭಾಗ (iii) ನ್ನು ಕೂಡಾ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

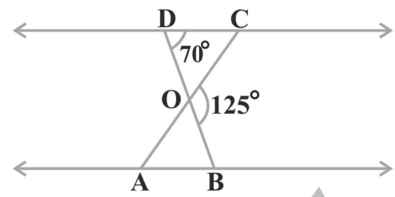
ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. ಚಿತ್ರ 2.34 ರಲ್ಲಿ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳು ಯಾವುವು ತಿಳಿಸಿ. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ಸಮರೂಪತೆಯ ಯಾವ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವಿರಿ ಎಂದು ಬರೆಯಿರಿ ಹಾಗೂ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು ಸಂಕೇತವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 2.34

2. ಚಿತ್ರ 2.35 ರಲ್ಲಿ $\Delta OBA \sim \Delta ODC$, $\angle BOC = 125^{\circ}$ ಮತ್ತು $\angle CDO = 70^{\circ}$ ಆದರೆ $\angle DOC$, $\angle DCO$ ಮತ್ತು $\angle OAB$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

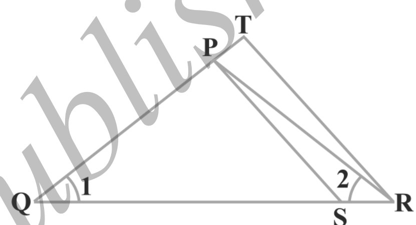


ಚಿತ್ರ 2.35

3. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ , $AB \parallel DC$ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇಧಿಸುತ್ತವೆ. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಉಪಯೋಗಿಸಿ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

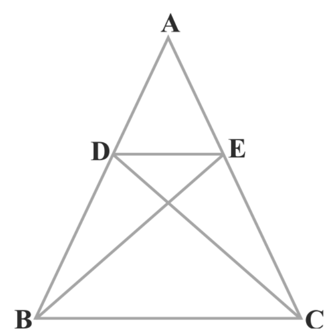
4. ಚಿತ್ರ 2.36 ರಲ್ಲಿ $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ ಮತ್ತು $\angle 1 = \angle 2$ ಆದರೆ $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. $\angle P = \angle RTS$ ಆಗಿರುವಂತೆ S ಮತ್ತು T ಗಳು ΔPQR ನ PR ಮತ್ತು QR ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಆದರೆ $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.36

6. ಚಿತ್ರ 2.37ರಲ್ಲಿ $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ರಲ್ಲಿ ಆದರೆ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.37

7. ಚಿತ್ರ 2.38 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಎತ್ತರಗಳಾದ AD ಮತ್ತು CE ಗಳು ಪರಸ್ಪರ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ

   i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$

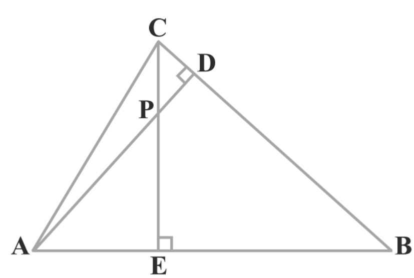
   ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$

   iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$

   iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

8. ABCD ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ವೃದ್ಧಿಸಿದ AD ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ E ಬಿಂದುವಿದೆ ಮತ್ತು BE ಮತ್ತು CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ F ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

9. ಚಿತ್ರ 2.39 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔAMP ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ

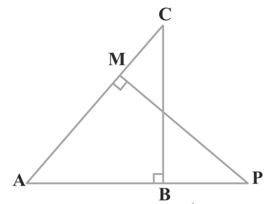


ಚಿತ್ರ 2.38

B ಮತ್ತು M ಗಳಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಕೋನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಆದರೆ:

i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$

ii) $\dfrac{CA}{PA} = \dfrac{BC}{MP}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.39

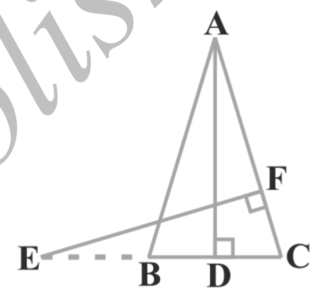
10. CD ಮತ್ತು GH ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $\angle ACB$ ಮತ್ತು $\angle EGF$ ಗಳ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಗಳಾಗಿರುವಂತೆ D ಮತ್ತು H ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔEFG ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು FE ಮೇಲೆ ಇವೆ. $\Delta ABC \sim \Delta EFG$ ಆದರೆ

i) $\dfrac{CD}{GH} = \dfrac{AC}{FG}$

ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$

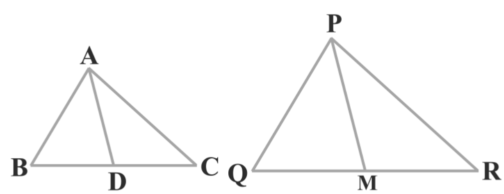
iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

11. ಚಿತ್ರ 2.40 ಯಲ್ಲಿ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ AB = AC, E ಯು CB ಯನ್ನು ವೃದ್ಧಿಸಿದ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು $AD \perp BC$, $EF \perp AC$ ಆದರೆ $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.40

12. ಚಿತ್ರ 2.41 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು BC ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AD ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳಾದ PQ ಮತ್ತು QR ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ PM ನೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದ್ದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.41

13. ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ADC = \angle BAC$ ಆಗುವಂತೆ D ಯು BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. ಆದರೆ $CA^2 = CB.CD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

14. ΔABC ಯು ಬಾಹುಗಳಾದ AB ಮತ್ತು AC ಗಳು ಹಾಗೂ ಮಧ್ಯರೇಖೆ AD ಯು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔPQR ನ ಬಾಹುಗಳಾದ PQ ಮತ್ತು PR ಹಾಗೂ ಮದ್ಯರೇಖೆ PM ನೊಂದಿಗೆ ಸಮಾನುಪಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

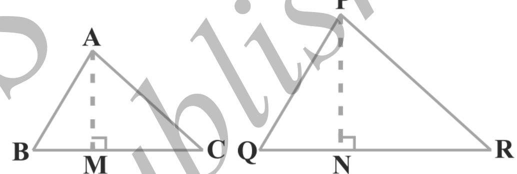
15. 6m ಎತ್ತರದ ನೇರವಾದ ಕಂಬವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ 4m ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಒಂಡು ಕಟ್ಟಡವು 28 ಮೀಟರ್ ಉದ್ದದ ನೆರಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಕಟ್ಟಡದ ಎತ್ತರವೇನು?

16. AD ಮತ್ತು PM ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ನ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾಗಿದ್ದು $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಆದರೆ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

2.5 ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಕಲಿತಿರುತ್ತೇವೆ. ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುರೂಪಕ್ಕೂ ಹಾಗೂ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೂ ಏನಾದರೂ ಸಂಬಂಧವಿದೆಯೇಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸಿರುವಿರಾ? ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಚದರ ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಳೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಹಾಗೇ ಈ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ನೀವು ನಿರೀಕ್ಷೆ ಮಾಡುತ್ತೀರಾ? ಹೌದು ನಿಜ ನಾವಿದನ್ನು ಮುಂದಿನ ಪ್ರಮೇಯದಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುವ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.6: *ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.*



ಚಿತ್ರ 2.42

ಸಾಧನೆ: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ಆಗುವಂತೆ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳನ್ನು ನಮಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 2.42 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು $\frac{ವಿ(ABC)}{ವಿ(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{PR}\right)^2$

ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಎತ್ತರ AM ಮತ್ತು PN ಗಳನ್ನು ನಾವು ಎಳೆಯಬೇಕು.

ಈಗ; $ವಿ(ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AM$

ಮತ್ತು $ವಿ(PQR) = \frac{1}{2} \times QR \times PN$

ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{ವಿ(ABC)}{ವಿ(PQR)} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times BC \times AM}{\cancel{\frac{1}{2}} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN}$ (1)

ಈಗ ΔABM ಮತ್ತು ΔPQN ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle B = \angle Q$ ($\because \Delta ABC \sim \Delta PQR$)

ಮತ್ತು $\angle M = \angle N$ ($\because$ ಪ್ರತಿಯೊಂದು 90° ಗೆ ಸಮ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ ($\because$ AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{AM}{PN} = \dfrac{AB}{PQ}$ (2)

ಅಲ್ಲದೆ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ($\because$ ದತ್ತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{CA}{RP}$ (3)

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{\text{ವಿ}(ABC)}{\text{ವಿ}(PQR)} = \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AM}{PN}$ ($\because$ (1) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ)

$= \dfrac{AB}{PQ} \times \dfrac{AB}{PQ}$ ($\because$ (2) ರಿಂದ)

$= \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2$

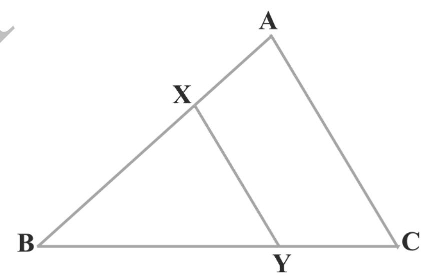
ಈಗ ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ

$$\frac{\text{ವಿ}(ABC)}{\text{ವಿ}(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{PR}\right)^2$$

ಎಂದು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗದ ನಿದರ್ಶನೆಗಾಗಿ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ಚಿತ್ರ 2.43 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯು AC ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ XY ರೇಖಾಖಂಡವು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಎರಡು ಭಾಗಗಳಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸಿದರೆ ಅನುಪಾತ $\dfrac{AX}{AB}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 2.43

ಪರಿಹಾರ: ನಮಗೆ $XY \parallel AC$ ($\because$ ದತ್ತ)

ಹೀಗೆ $\underline{|BXY} = \underline{|A}$ ($\because$ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು)

$\underline{|BYX} = \underline{|C}$

$\therefore$ $\Delta ABC \sim \Delta XBY$ ($\because$ AA ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

ಹೀಗೆ $\dfrac{\text{ವಿ}(ABC)}{\text{ವಿ}(XBY)} = \left(\dfrac{AB}{XB}\right)^2$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.6) (1)

ಅಲ್ಲದೆ ವಿ(ABC) = 2 ವಿ(XBY) ($\because$ ದತ್ತ)

ಹೀಗೆ $\dfrac{\text{ವಿ}(ABC)}{\text{ವಿ}(XBY)} = \dfrac{2}{1}$ (2)

$\therefore$ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1} \text{ ಅಂದರೆ } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

ಅಥವಾ $\therefore$ $$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ಅಥವಾ $$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

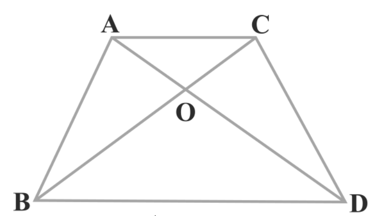
$$\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \text{ ಅಂದರೆ } \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ $64cm^2$ ಮತ್ತು $121cm^2$ ಗಳಾಗಿದ್ದು $EF = 15.4cm$ ಆದರೆ BC ಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

2. ABCD ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದಲ್ಲಿ $AB \parallel CD$ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. $AB = 2CD$ ಆದರೆ ΔAOB ಮತ್ತು ΔCOD ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಚಿತ್ರ 2.44 ರಲ್ಲಿ ABC ಮತ್ತು DBC ಎಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಒಂದೇ ಪಾದ BC ಯ ಮೇಲಿವೆ. AD ಮತ್ತು BC ಗಳು ಪರಸ್ಪರ O ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ $\frac{\text{ವಿ}(ABC)}{\text{ವಿ}(DBC)} = \frac{AO}{DO}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.44

4. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳು ಸರ್ವಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. D, E ಮತ್ತು F ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ΔABC ಯ ಬಾಹುಗಳಾದ AB, BC ಮತ್ತು AC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ΔDEF ಮತ್ತು ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಸಿ.

7. ವರ್ಗದ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಅದೇ ವರ್ಗದ ಒಂದು ಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ ರಚಿಸಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರವನ್ನು ಗುರುತು ಮಾಡಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

8. ΔABC ಮತ್ತು ΔBDE ಗಳು ಎರಡು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜಗಳು D ಯು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು

ಆದರೆ ΔABC ಮತ್ತು ΔBDE ಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ

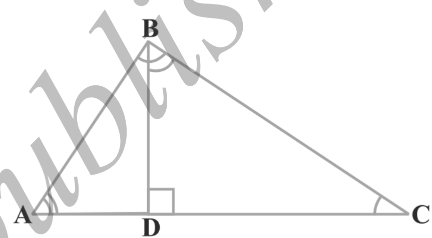
A) 2 : 1 B) 1 : 2 C) 4 : 1 D) 1 : 4

9. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ 4 : 9 ಅದರೆ ಅವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತ

A) 2 : 3 B) 4 : 9 C) 81 : 16 D) 16 : 81

2.6. ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ:

ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪರಿಚಯ ಹೊಂದಿರುವಿರಿ. ಕೆಲವು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮುಖಾಂತರ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿರುವಿರಿ ಹಾಗೂ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಇದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿರುವಿರಿ. 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೋಡಿರುವಿರಿ. ಈಗ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಾವು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ. *ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗದಿಂದ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವಿಭಾಗಿಸುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ* ಎಂಬ ಫಲಿತಾಂಶ ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಪ್ರಮೇಯ ಸಾಧಿಸೋಣ.



ಚಿತ್ರ 2.45

ಈ $\angle B$ ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುವ ಲಂಬಕೋನ ΔABC ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. BD ಯು ವಿಕರ್ಣ AC ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರಲಿ. (ಚಿತ್ರ 2.45 ನೋಡಿ)

ΔADB ಮತ್ತು ΔABC ಗಳಲ್ಲಿ

$\angle A = \angle A$

ಮತ್ತು $\angle ADB = \angle ABC$ (ಏಕೆ?)

ಆದರೆ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ಹೇಗೆ?)

ಹಾಗೆಯೇ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ಹೇಗೆ?)

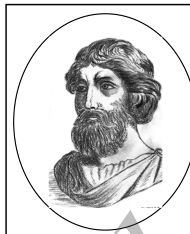
ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ ಲಂಬ BD ಯ ಎರಡೂ ಪಾರ್ಶ್ವಗಳಲ್ಲಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವುದಲ್ಲದೆ ಅವುಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೂ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

ಮತ್ತು $\Delta BDC \sim \Delta ABC$

ಆದರೆ $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (ವಿಭಾಗ 2.2ನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದರಿಂದ)

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.



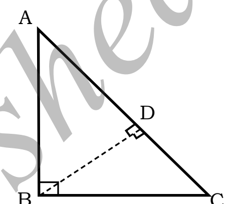
ಪೈಥಾಗೊರಸ್
ಕ್ರಿಪೂ 569 – 479

ಪ್ರಮೇಯ 2.7:

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಶೃಂಗದಿಂದ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವಿಭಾಗಿಸುವ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪ ಅಲ್ಲದೆ ಅವುಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.8:

ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 2.46

ಸಾಧನೆ: ΔABC ಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದ್ದು $\underline{|B}$ ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$BD \perp AC$ ರಚಿಸಬೇಕು. (ಚಿತ್ರ 2.46ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಈಗ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.7)

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$ ($\because$ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿವೆ)

ಅಥವಾ $AD.AC = AB^2$ (1)

ಅಲ್ಲದೆ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.7)

ಆದ್ದರಿಂದ $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{BC}{AC}$

ಅಥವಾ $CD.AC = BC^2$ (2)

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ

$$AD.AC + CD.AC = AB^2 + BC^2$$

ಅಥವಾ $AC\,(AD+CD) = AB^2 + BC^2$

ಅಥವಾ $AC \times AC = AB^2 + BC^2$

$\Longrightarrow$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಭಾರತೀಯ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಬೌಧಾಯನ ಅವರು (ಕ್ರಿ.ಪೂ 800 ರಲ್ಲಿ) ಮೊದಲ ಬಾರಿಗೆ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಹೇಳಿರುವರು.

"ಆಯತದ ವಿಕರ್ಣವು ಅದರ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು ಒಟ್ಟು ಸೇರಿ ಉಂಟುಮಾಟುವಷ್ಟೇ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಉಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ."

ಆದ್ದರಿಂದ ಕೆಲವು ಸಲ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬೌಧಾಯನನ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದೂ ಹೇಳಲಾಗುತ್ತಿದೆ.

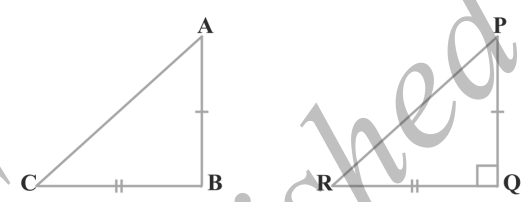
ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮವೇನು? ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಕೂಡಾ ಸರಿ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿರುವಿರಿ. ನಾವು ಇದನ್ನು ಈಗ ಒಂದು ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ತಿಳಿದು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 2.9: *ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ ಆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ನಡುವೆ ಲಂಬಕೋನ ಏರ್ಪಡುತ್ತದೆ.*

ಸಾಧನೆ: ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ಎಂದು ನಮಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ನಾವು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾದುದು $\angle B = 90^\circ$

$PQ = AB$ ಮತ್ತು $QR = BC$ ಆಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ΔPQR ನಲ್ಲಿ $\angle Q = 90^\circ$ ಇರುವಂತೆ ರಚಿಸೋಣ. (ಚಿತ್ರ 2.47ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 2.47

ಈಗ ΔPQR ನಿಂದ ನಮಗೆ

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ ($\because$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ $\angle Q = 90^\circ$ ಆಗಿರುವಾಗ)

$PR^2 = AB^2 + BC^2$ ($\because$ ರಚನೆಯಿಂದ) (1)

ಆದರೆ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ($\because$ ದತ್ತ) (2)

ಆದ್ದರಿಂದ $AC = PR$ ($\because$ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ)

ಈಗ ΔABC ಮತ್ತು ΔPQR ಗಳಲ್ಲಿ

$AB = PQ$ ($\because$ ರಚನೆಯಿಂದ)

$BC = QR$

$AC = PR$ ($\because$ (3) ರಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸಿದೆ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ($\because$ ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ ಸಿದ್ಧಾಂತ)

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle B = \angle Q$ ($\because$ ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ)

ಆದರೆ $\angle Q = 90^\circ$ ($\because$ ರಚನೆಯಿಂದ)

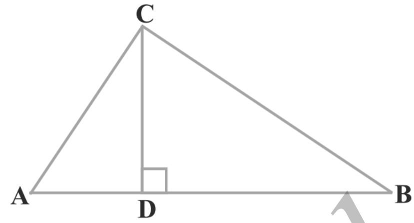
ಆದ್ದರಿಂದ $\angle B = 90^\circ$

ಸೂಚನೆ: ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಮತ್ತೊಂದು ಸಾಧನೆಗಾಗಿ ಅನುಬಂಧ (1) ನ್ನು ಕೂಡಾ ನೋಡಿ

ಈ ಪ್ರಮೇಯದ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ಚಿತ್ರ 2.48 ರಲ್ಲಿ $\angle ACB = 90^{\circ}$ ಮತ್ತು

$CD \perp AB$ ಆದರೆ $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.48

ಪರಿಹಾರ: $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.7)

ಹಾಗಾದರೆ $\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$

ಅಥವಾ $AC^2 = AD.AB$ (1)

ಹಾಗೆಯೇ $\Delta BCD \sim \Delta BAC$ ($\because$ ಪ್ರಮೇಯ 2.7)

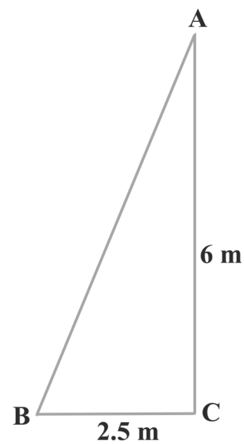
ಹಾಗಾಗಿ $\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$

ಅಥವಾ $BC^2 = BA.BD$ (2)

ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ರಿಂದ

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{\cancel{BA}}{\cancel{AB}} \times \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{AD}$$

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಒಂದು ಏಣಿಯ ಪಾದವು ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಗೋಡೆಯಿಂದ 2.5m ದೂರದಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಅದರ ತುದಿಯು ನೆಲದ ಮೇಲಿಂದ 6m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿರುವ ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ಏಣಿಯನ್ನು ಗೋಡೆಗೆ ಒರಗಿಸಿ ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಏಣಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ



ಚಿತ್ರ 2.49

ಪರಿಹಾರ: AB ಯು ಏಣಿ, CA ಯು ಗೋಡೆ ಮತ್ತು A ಕಿಟಕಿಯಾಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 2.49 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಹಾಗಾಗಿ $BC = 2.5m$ ಮತ್ತು $CA = 6m$

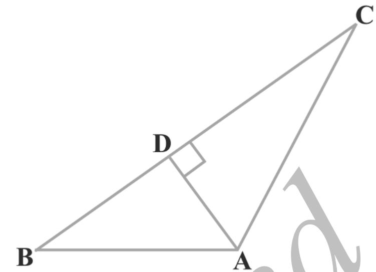
ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ನಮಗೆ:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$
$$= (2.5)^2 + 6^2$$
$$= 42.25$$

ಹಾಗಾಗಿ $AB = 6.5$

ಆದ್ದರಿಂದ ಏಣಿಯ ಉದ್ದವು 6.5m ಆಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 12: ಚಿತ್ರ 2.50 ಯಲ್ಲಿ $AD \perp BC$ ಆದರೆ $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.50

ಪರಿಹಾರ: ΔADC ಯಲ್ಲಿ,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

($\because$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ) (1)

ΔADB ಯಲ್ಲಿ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

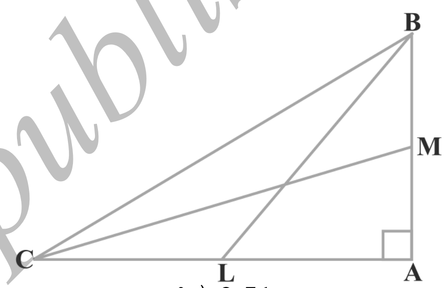
($\because$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ) (2)

(2) ರಿಂದ (1) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

ಅಥವಾ $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$

ಉದಾಹರಣೆ 13: BL ಮತ್ತು CM ಗಳು ABC ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಾದರೆ $4(BL^2+CM^2) = 5BC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.51

ಪರಿಹಾರ: ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle A = 90^O$ ಆಗಿದ್ದು BL ಮತ್ತು CM ಗಳು ಅದರ ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳು (ಚಿತ್ರ 2.51 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ΔABC ನಿಂದ,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \ (\because \text{ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ}) \ (1)$$

ΔABL ನಿಂದ,

$$BL^2 = AL^2 + AB^2 \ (\because \text{ ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ})$$

ಅಥವಾ $BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2$ ($\because$ L, AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

ಅಥವಾ $BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$

ಅಥವಾ $4BL^2 = AC^2 + 4AB^2$ (2)

ΔCMA ನಿಂದ

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

ಅಥವಾ $CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ($\because$ M ಇದುAB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು)

ಅಥವಾ $CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$

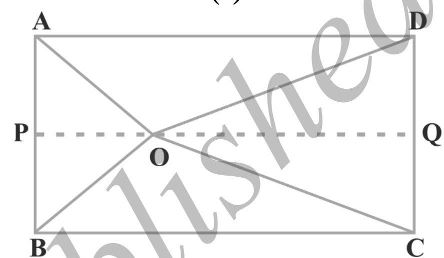
ಅಥವಾ $4CM^2 = 4AC^2 + AB^2$ (3)

(2) ಮತ್ತು (3) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ನಮಗೆ

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

ಅಂದರೆ $4(BL^2 + CM^2) = 5BC^2$ (1) ರಿಂದ

ಉದಾಹರಣೆ 14: ABCD ಆಯತದೊಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬಿಂದು O ಆಗಿದೆ (ಚಿತ್ರ 2.52 ನ್ನು ನೋಡಿ) $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.52

ಪರಿಹಾರ: AB ಯ ಮೇಲೆ P ಹಾಗೂ DC ಯ ಮೇಲೆ Q ಬಿಂದುಗಳು ಇರುವಂತೆ O ಮೂಲಕ $PQ \parallel BC$ ರಚಿಸಿ.

ಈಗ $PQ \parallel BC$

$\therefore$ $PQ \perp AB$ ಮತ್ತು $PQ \perp DC$ ($\because \angle B = 90^\circ$ ಮತ್ತು $\angle C = 90^\circ$)

ಹಾಗಾಗಿ $\angle BPQ = 90^\circ$ ಮತ್ತು $\angle CQP = 90^\circ$

$\therefore$ BPQC ಮತ್ತು APQD ಗಳೆರಡೂ ಆಯತಗಳು

ಈಗ ΔOPB ನಿಂದ

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

ಹಾಗೆಯೆ ΔOQD ನಿಂದ,

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

ΔOQC ನಿಂದ

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

ಮತ್ತು ΔOAP ನಿಂದ,

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$

$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$ ($\because$ BP=CQ ಮತ್ತು DQ=AP)

$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$

$= OC^2 + OA^2$ ($\because$ (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ)

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ಅಳತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

   i) 7cm, 24cm, 25cm

   ii) 3cm, 8cm, 6cm

   iii) 50cm, 80cm, 100cm

   iv) 130cm, 12cm, 5cm

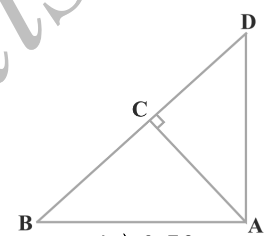
2. ΔPQR ನಲ್ಲಿ $\underline{|P}$ ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ. $PM \perp QR$ ಆಗುವಂತೆ QR ಮೇಲೆ M ಒಂದು ಬಿಂದು. ಆದರೆ $PM^2 = QM.MR$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

3. ಚಿತ್ರ 2.53 ರಲ್ಲಿ ΔABD ಯಲ್ಲಿ $\underline{|A} = 90^O$ $AC \perp BD$ ಆದರೆ

   i) $AB^2 = BC.BD$

   ii) $AC^2 = BC.DC$

   iii) $AD^2 = BD.CD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



ಚಿತ್ರ 2.53

4. ABC ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ $\underline{|C}$ ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದೆ $AB^2 = 2AC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ΔABC ಯು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದ್ದು $AC = BC$, $AB^2 = 2AC^2$ ಆದರೆ ΔABC ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

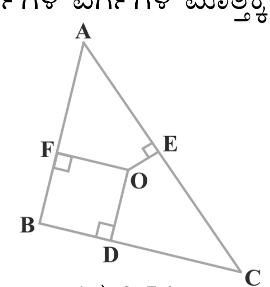
6. ΔABC ಯು ಬಾಹು 2a ಇರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಎತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

8. ಚಿತ್ರ 2.54 ರಲ್ಲಿ O ವು ΔABC ಯ ಒಳಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ $OD \perp BC$, $OE \perp AC$, $OF \perp AB$ ಆದರೆ

   i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

   ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.54

9. 10m ಎತ್ತರವಿರುವ ಏಣಿಯು ನೆಲದಿಂದ 8m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಗೋಡೆಯಲ್ಲಿರುವ ಕಿಟಕಿಯನ್ನು ಮುಟ್ಟುತ್ತದೆ ಹಾಗಾದರೆ ಏಣಿಯ ಪಾದವು ನೆಲದಿಂದ ಎಷ್ಟು ದೂರದಲ್ಲಿದೆ?

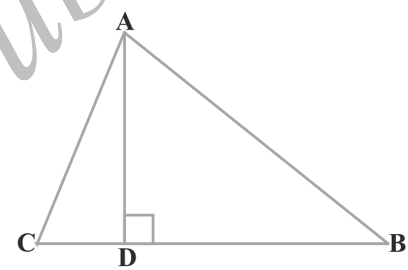
10. 24m ಉದ್ದದ ತಂತಿಯನ್ನು 18m ಎತ್ತರದ ಒಂದು ನೇರವಾದ ಕಂಬದ ತುದಿಗೆ ಕಟ್ಟಿ ಅದರ ಇನ್ನೊಂದು ತುದಿಯನ್ನು ನೆಲದ ಮೇಲಿರುವ ಗೂಟಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ತಂತಿಯು ಬಿಗಿಯಾಗಿ ಇರುವಂತೆ ಕಟ್ಟಬೇಕಾದರೆ ಕಂಬದ ಬುಡದಿಂದ ಗೂಟವನ್ನು ಎಷ್ಟು ದೂರದವರೆಗೆ ಕೊಂಡೊಯ್ಯಬೇಕು?

11. ವಿಮಾನವೊಂದು ಒಂದು ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಟು ಗಂಟೆಗೆ 1000km ಜವದಿಂದ ಉತ್ತರದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ವಿಮಾನವು ಅದೇ ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಹೊರಟು ಗಂಟೆಗೆ 1200km ಜವದಿಂದ ಪಶ್ಚಿಮದ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತದೆ. $1\frac{1}{2}$ ಗಂಟೆಗಳ ನಂತರ ವಿಮಾನಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು?

12. 6m ಮತ್ತು 11m ಉದ್ದದ ಎರಡು ಕಂಬಗಳು ಸಮತಟ್ಟಾದ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ನಿಂತಿವೆ. ಆ ಕಂಬಗಳ ಪಾದಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 12m ಆದರೆ ಅವುಗಳ ತುದಿಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೇನು?

13. ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\underline{|C} = 90^\circ$ D ಮತ್ತು E ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ CA ಮತ್ತು CB ಗಳ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುಗಳು ಆದರೆ $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

14. $DB = 3\,CD$ ಆಗುವಂತೆ ΔABCಯಲ್ಲಿ A ನಿಂದ BC ಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು BC ಯನ್ನು D ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 2.55ನ್ನು ನೋಡಿ) $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.55

15. $BD = \frac{1}{3}BC$ ಆಗುವಂತೆ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯಲ್ಲಿ D ಯು BC ಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ. $9AD^2 = 7AB^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

16. ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ವರ್ಗದ ಮೂರರಷ್ಟು ಅದರ ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಎತ್ತರದ ನಾಲ್ಕರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

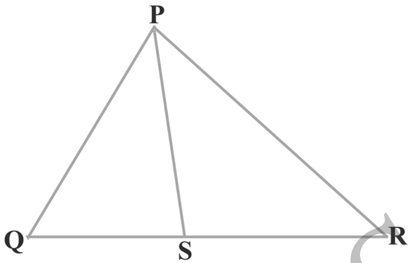
17. ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರ ಗುರ್ತಿಸಿ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

ΔABC ಯಲ್ಲಿ $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm ಮತ್ತು $BC = 6$ cm ಆದರೆ $\underline{|B}$ ಯು

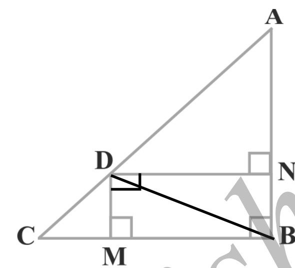
A) 120° B) 60° C) 90° D) 45°

ಅಭ್ಯಾಸ 2.6 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. ಚಿತ್ರ 2.56 ರ ΔPQR ನಲ್ಲಿ PS ಇದು $\angle QPR$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ $\frac{QS}{SR}=\frac{PQ}{PR}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



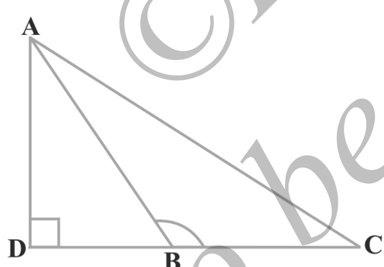
ಚಿತ್ರ 2.56



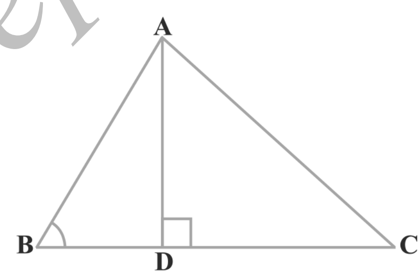
ಚಿತ್ರ 2.57

2. ಚಿತ್ರ 2.57 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯ AC ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲೆ D ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ $BD \perp AC$, $DM \perp BC$ ಮತ್ತು $DN \perp AB$ ಆದರೆ i) $DM^2 = DN.MC$, ii) $DN^2 = DM.AN$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

3. ಚಿತ್ರ 2.58 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC > 90^{O}$ ಮತ್ತು $AD \perp CB$ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗಕ್ಕೆ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC.BD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ



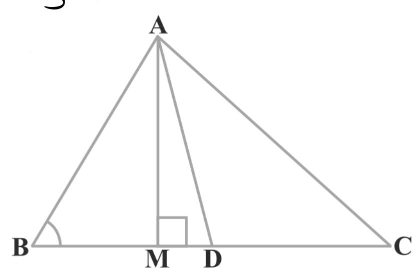
ಚಿತ್ರ 2.58



ಚಿತ್ರ 2.59

4. ಚಿತ್ರ 2.59 ರಲ್ಲಿ ΔABC ಯಲ್ಲಿ $\angle ABC < 90^{O}$ ಮತ್ತು $AD \perp BC$ ಆದರೆ $AC^2=AB^2+BC^2-2BC.BD$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಚಿತ್ರ 2.60 ರಲ್ಲಿ AD ಯು ΔABC ಯ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. $AM \perp BC$ ಆದರೆ



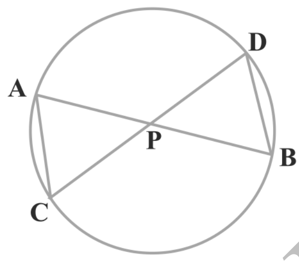
ಚಿತ್ರ 2.60

i) $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

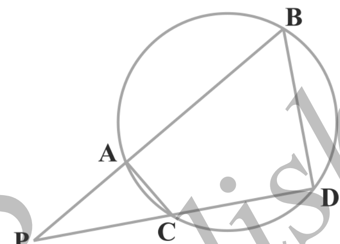
ii) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$ iii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತವು ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

7. ಚಿತ್ರ 2.61 ರಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದರೆ
   i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$
   ii) AP.PB = CP.DP ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ

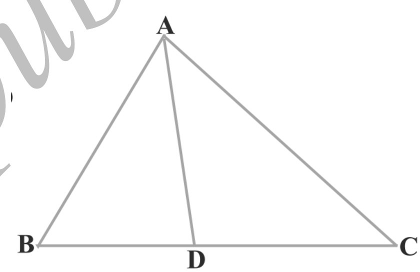


ಚಿತ್ರ 2.61



ಚಿತ್ರ 2.62

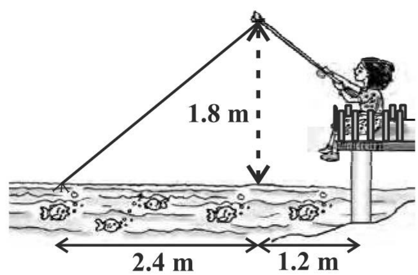
8. ಚಿತ್ರ 2.62 ರಲ್ಲಿ ಒಂದು ವೃತ್ತದ AB ಮತ್ತು CD ಜ್ಯಾಗಳು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ (ವೃದ್ಧಿಸಿದಾಗ) ಆದರೆ
   i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$
   ii) PA.PB = PC.PD ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 2.63

9. ಚಿತ್ರ 2.63 ರಲ್ಲಿ $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ಆಗುವಂತೆ ΔABC ಯ BC ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದು D ಆದರೆ AD ಯು $\angle BAC$ ಯ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ನಜೀಮ ಒಂದು ಚಿಕ್ಕನದಿಯಲ್ಲಿ ಗಾಳ ಹಾಕಿ ಮೀನು ಹಿಡಿಯುತ್ತಿರುತ್ತಾಳೆ. ಗಾಳದ ಸಲಾಕೆಯ ತುದಿಯು ನೀರಿನ ಮಟ್ಟದಿಂದ 1.8m ಎತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ ಮತ್ತು ದಾರದ ತುದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಗಾಳವು ಅವಳಿಂದ ನೀರಿನ ಮೇಲ್ಮೈ ಮೇಲೆ 3.6m ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಹಾಗೂ ಗಾಳದ ಸಲಾಕೆಯ ತುದಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ನೀರಿನ ಮೇಲ್ಮೈಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 2.4 ದೂರದಲ್ಲಿದೆ. ಗಾಳದ ದಾರವು (ಸಲಾಕೆಯ ತುದಿಯಿಂದ ಗಾಳದವರೆಗೆ) ಬಿಗಿಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿದಾಗ ಅವಳು ಎಷ್ಟು ಉದ್ದದ ದಾರ ಹೊರ ಹಾಕಬೇಕು? (ಚಿತ್ರ 2.64ನ್ನು ನೋಡಿ) ಅವಳು ದಾರವನ್ನು ಪ್ರತಿ ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ 5cm ವೇಗದಲ್ಲಿ ಎಳೆದರೆ 12 ಸೆಕೆಂಡಗಳ ನಂತರ ಅವಳಿಂದ ಗಾಳಕ್ಕೆ ಇರುವ ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ದೂರವೇನು?



ಚಿತ್ರ 2.64

*ಈ ಅಭ್ಯಾಸವು ಪರೀಕ್ಷೆ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಇಲ್ಲ

2.7 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ಒಂದೇ ಆಕಾರವಿರುವ ಆದರೆ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಒಂದೇ ಗಾತ್ರ ಇರಬೇಕಾಗಿರದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಸಮರೂಪ ಆಕೃತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

2. ಎಲ್ಲಾ ಸರ್ವಸಮ ಆಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪ ಆದರೆ ಇದರ ವಿಲೋಮ ನಿಜವಲ್ಲ.

3. ಬಾಹುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಒಂದೇ ಇರುವ ಎರಡು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳು ಸಮರೂಪ ಆಗಿರಬೇಕಾದರೆ i) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮ ii) ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮ (ಅಂದರೆ ಸಮಾನುಪಾತ)

4. ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯು ಆ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

5. ತ್ರಿಭುಜದ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ರೇಖೆಯು ತ್ರಿಭುಜದ ಮೂರನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳ ಸಮವಾದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಅದರಿಂದ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಕೋ.ಕೋ.ಕೋ ಸಮಾರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

7. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಎರಡು ಕೋನಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು (ಕೋ.ಕೋ(AA) ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

8. ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಕೋನಗಳು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ ಆ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಬಾ.ಬಾ.ಬಾ(sss) ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

9. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಒಂದು ಕೋನಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದ್ದು ಮತ್ತು ಆ ಎರಡು ಕೋನಗಳನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡಿರುವ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತ ಸಮಾನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳು (ಬಾ.ಕೋ.ಬಾ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ)

10. ಎರಡು ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವು ಅವುಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ವರ್ಗಗಳ ಅನುಪಾತಕ್ಕೆ ಸಮ.

11. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನ ಇರುವ ಶೃಂಗದಿಂದ ವಿಕರ್ಣಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪ ಅಲ್ಲದೆ ಅವುಗಳೂ ಪರಸ್ಪರ ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

12. ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ವಿಕರ್ಣದ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ (ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯ).

13. ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಬಾಹುವಿನ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗವು ಉಳಿದೆರಡು ಬಾಹುಗಳ ಮೇಲಿನ ವರ್ಗಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದರೆ, ಮೊದಲನೇ ಬಾಹುವಿಗೆ ಅಭಿಮುಖವಾಗಿರುವ ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ಎರಡು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಹುವು ಮತ್ತು ಮತ್ತೊಂದರ ವಿಕರ್ಣ ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುವು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾನುಪಾತ ಹೊಂದಿದ್ದರೆ ಆ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ಸಮರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಸಮರೂಪತೆಯ ಲಂ.ವಿ.ಬಾ (RHS) ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಈ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣವನ್ನು ಅಧ್ಯಾಯ 11ರ ಎರಡನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದರೆ ಸಾಧನೆಯು ಸರಳವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

❀ ❀❀

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

3

3.1 ಪೀಠಿಕೆ:

ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಅನೇಕ ಬಾರಿ ನೀವು ಕೂಡಾ ಎದುರಿಸಿರಬಹುದು.

ಅಖಿಲಾ ತನ್ನ ಹಳ್ಳಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜಾತ್ರೆಗೆ ಹೋದಳು. ಅವಳು ದೈತ್ಯ ಚಕ್ರ(Giant Wheel)ದಲ್ಲಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಿ ಆನಂದಿಸಲು ಮತ್ತು ಹೂಪ್ಲಾ [ಇದೊಂದು ಉಂಗುರ (ರಿಂಗ್) ಎಸೆತದ ಆಟ, ಒಂದು ಮೇಜಿನ ಮೇಲೆ ಅನೇಕ ವಸ್ತುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿರುತ್ತಾರೆ. ನೀವು ಎಸೆಯುವ ಉಂಗುರವು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ಸುತ್ತುಗಟ್ಟಿದರೆ, ಆ ವಸ್ತುವು ನಿಮ್ಮದಾಗುತ್ತದೆ.] ಎಂಬ ಆಟವನ್ನಾಡಲು ಬಯಸಿದಳು. ಅವಳು ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವಾಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯು, ದೈತ್ಯ ಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದ ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅರ್ಧದಷ್ಟು. ದೈತ್ಯ ಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸವಾರಿಗೆ ₹ 3 ಮತ್ತು ಒಮ್ಮೆ ಹೂಪ್ಲಾ ಆಡಲು ₹ 4 ಖರ್ಚಾಗುವುದಾದರೆ ಹಾಗೂ ಅವಳು ಒಟ್ಟು ₹ 20 ಖರ್ಚು ಮಾಡಿದ್ದರೆ, ಅವಳು ಮಾಡಿದ ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಆಡಿದ ಆಟಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ?

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೀವಿದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದು. ಅವಳು ಒಂದು ಬಾರಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಿದ್ದರೆ, ಇದು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಎರಡು ಸವಾರಿಗಳಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಅಥವಾ ಇಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದಾಗಿ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಕಲಿತ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಅಖಿಲಾ ಮಾಡಿದ ಒಟ್ಟು ಸವಾರಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ನಿಂದಲೂ, ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವನ್ನು ಒಟ್ಟು ಆಡಿದ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಈಗ, ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಮೇಲಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

ಈ ಜೋಡಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವೆ? ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇರುವ ಅನೇಕ ವಿಧಾನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತೇವೆ.

3.2 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ

ಕೆಳಗಿನವುಗಳು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ಎಂಬುದಾಗಿ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

ಮತ್ತು $\quad x - 0y = 2$, ಅಂದರೆ, $x = 2$

$ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದ, a , b ಮತ್ತು c ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವ, **a ಮತ್ತು b ಈ ಎರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದಿರುವ** ಯಾವುದೇ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದು ಕೂಡಾ ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ. (a ಮತ್ತು b ಈ ಎರಡೂ ಸೊನ್ನೆ ಅಲ್ಲದಿರುವ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ $a^2 + b^2 \neq 0$ ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ.) ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಲು x ಗೊಂದು ಬೆಲೆ, y ಗೊಂದು ಬೆಲೆ ಎಂಬಂತೆ, ಒಂದು ಜೊತೆ ಬೆಲೆಗಳು ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 1$ ಮತ್ತು $y = 1$ ಎಂಬುದಾಗಿ $2x + 3y = 5$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಆದೇಶಿಸೋಣ. ಆಗ,

$$\text{ಎಡಭಾಗ} = 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5,$$

ಇದು ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$ ಮತ್ತು $y = 1$ ಎಂಬುದು $2x + 3y = 5$ ಸಮೀಕರಣದ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ.

ಈಗ ನಾವು, $x = 1$, $y = 7$ ಎಂಬುದಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y = 5$ ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸೋಣ ಆಗ,

$$\text{ಎಡಭಾಗ} = 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$$

ಇದು ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸಮವಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$ ಮತ್ತು $y = 1$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣದ ಪರಿಹಾರ **ಅಲ್ಲ**

ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು? ಇದರ ಅರ್ಥವೇನೆಂದರೆ, (1, 1) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y = 5$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿದೆ ಮತ್ತು (1, 7) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು ಅದರ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ **ಸಮೀಕರಣದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಹಾರವೂ ಅದನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿದೆ.**

ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಇದು ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, **ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $ax + by + c = 0$ ಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಹಾರ (x, y) ಯು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ ಅನುರೂಪವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸರಿಯಾಗಿದೆ(vice versa)**.

ಈಗ ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2)ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಒಟ್ಟಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಅದು ಜಾತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಅಖಿಲಾಳ ಕುರಿತಂತೆ ನಮ್ಮಲ್ಲಿರುವ ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ.

ಈ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳೂ **x ಮತ್ತು y ಗಳೆಂಬ ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿವೆ**. ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು *ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.*

ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ, ಇಂತಹ ಜೋಡಿಗಳು ಹೇಗೆ ಗೋಚರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

x ಮತ್ತು y ಎಂಬ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ಮತ್ತು

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

ಇಲ್ಲಿ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ಗಳೆಲ್ಲಾ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

$2x + 3y - 7 = 0$ ಮತ್ತು $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ ಮತ್ತು $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ ಮತ್ತು $17 = y$

ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಹೇಗೆ ಗೋಚರಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೆ?

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ (ಅಂದರೆ ನಕ್ಷಾ ರೂಪದ) ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂಬುದಾಗಿ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಜೋಡಿ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಕಾಣಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೀವು ಸೂಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಅಲ್ಲಿ

ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿರುತ್ತವೆ, ಎರಡನ್ನೂ ಒಟ್ಟಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಎರಡು ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಕೆಳಗಿನ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಸಾಧ್ಯತೆ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

(i) ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ.

(ii) ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರ.

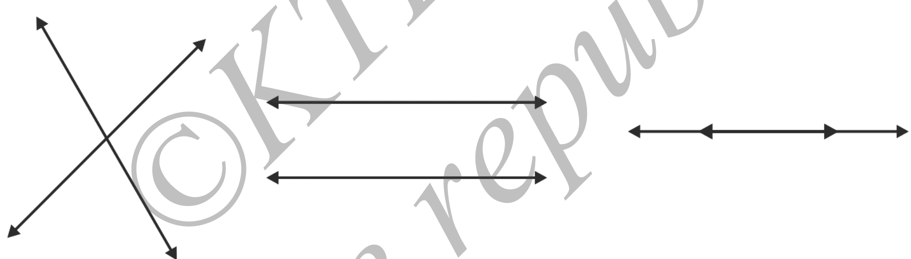
(iii) ಎರಡು ರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ.

ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಚಿತ್ರ 3.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 3.1 (a) ಯಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ.

ಚಿತ್ರ 3.1 (b) ಯಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ.

ಚಿತ್ರ 3.1 (c) ಯಲ್ಲಿ, ಅವುಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಂಡಿವೆ.



ಚಿತ್ರ 3.1

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಎಂಬ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳೂ ಜೊತೆಜೊತೆಯಾಗಿ ಸಾಗುತ್ತವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ವಿಭಾಗ 3.1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಖಿಲಾ ₹ 20ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಜಾತ್ರೆಗೆ ಹೋಗುತ್ತಾಳೆ. ಅಲ್ಲಿ ಅವಳು ದೈತ್ಯಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಲು ಮತ್ತು ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವಾಡಲು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ (ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ) ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ರಚಿತವಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು,

$$y = \frac{1}{2}x$$

ಅಂದರೆ, $$x - 2y = 0 \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು

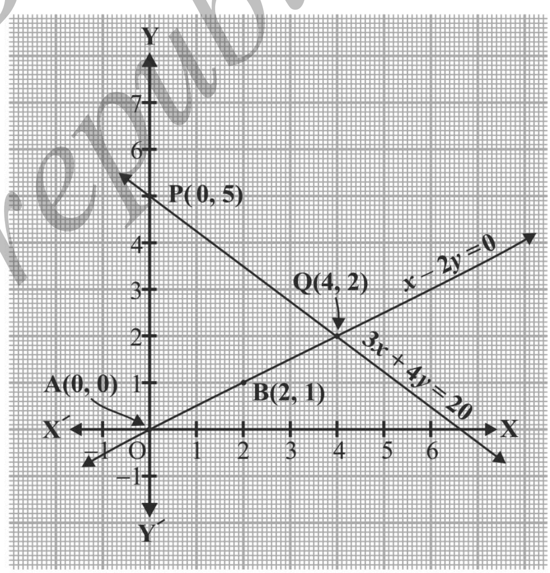
ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಕನಿಷ್ಠ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಕೋಷ್ಟಕ 3.1 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಈ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನೀಡುತ್ತೇವೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20 - 3x}{4}$	5	0	2

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದಾಗಿ IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ಆದುದರಿಂದ ನಾವು ಈಗ ಆರಿಸಿದುದಕ್ಕಿಂತ ಭಿನ್ನವಾದ ಎರಡು ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ಕೂಡಾ ಆರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಒಂದನೇ ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $x = 0$ ಎಂಬುದಾಗಿ ನಾವು ಯಾಕೆ ಆರಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿಮಗೆ ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಬೆಲೆ ಸೊನ್ನೆ ಆದಾಗ, ಆ ಸಮೀಕರಣವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ, ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x = 0$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $4y = 20$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $y = 5$ ಅದೇ ರೀತಿ $y = 0$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $3x = 20$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ $x = \frac{20}{3}$. ಆದರೆ $\frac{20}{3}$ ಎಂಬುದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಅಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಅದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಗುರುತಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $y = 2$ ನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆಗ $x = 4$ ಎಂಬ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಬೆಲೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 3.2

ಕೋಷ್ಟಕ 3.1 ರಲ್ಲಿರುವ ಪರಿಹಾರಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ, A (0, 0), B (2, 1) ಮತ್ತು P (0, 5), Q (4, 2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸೋಣ. ಈಗ ಚಿತ್ರ 3.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, $x - 2y = 0$ ಮತ್ತು $3x + 4y = 20$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ AB ಮತ್ತು PQ ಸರಳ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 3.2 ರಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು (4, 2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಮುಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ರೋಮೀಲಾ ಒಂದು ಲೇಖನ ಸಾಮಾಗ್ರಿಗಳ ಅಂಗಡಿಗೆ ಹೋಗಿ ₹ 9ಕ್ಕೆ 2 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 3 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು. ಅವಳ ಗೆಳತಿ ಸೋನಾಲಿಯು ರೋಮೀಲಾಳ ಬಳಿ ಇರುವ ಹೊಸ ಬಗೆಯ ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ರಬ್ಬರ್‌ಗಳನ್ನು ನೋಡಿ ಅಂತಹುದೇ 4 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 6 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳನ್ನು ₹ 18 ಕ್ಕೆ ಖರೀದಿಸಿದಳು. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ x ನಿಂದಲೂ ಒಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ y ಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ, ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

ಇದಕ್ಕೆ ಸಮಾನವಾದ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಎರಡೆರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಕೋಷ್ಟಕ 3.2ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3.2

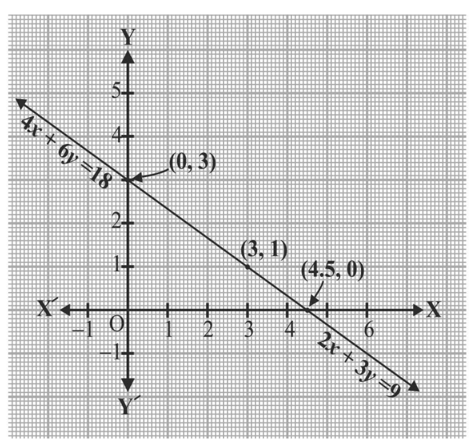
x	0	4.5
$y = \frac{9 - 2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \frac{18 - 4x}{6}$	3	1

(ii)

ಈ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ಗುರುತಿಸಿ ನಾವು ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳೂ ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ (ಚಿತ್ರ 3.3 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ). ಈ ರೀತಿ ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳಲು ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ, ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದು. ಅಂದರೆ ಒಂದರಿಂದ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 3.3

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಎರಡು ಹಳಿಗಳನ್ನು $x + 2y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 4y - 12 = 0$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ:

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 3.3 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3.3

x	0	4
$y = \frac{4-x}{2}$	2	0

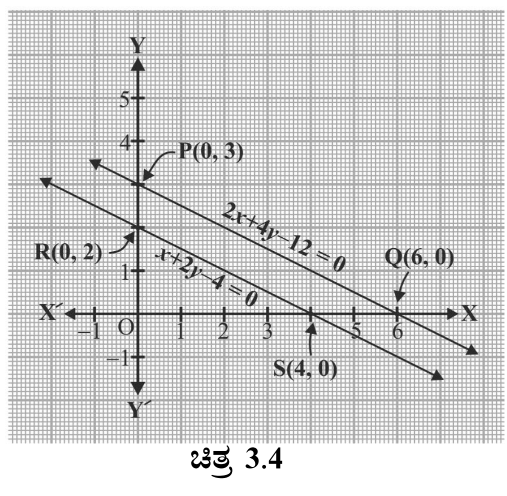
(i)

x	0	6
$y = \frac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ನಕ್ಷಾ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನಾವು R(0, 2) ಮತ್ತು S(4, 0) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ RS ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಹಾಗೂ P(0, 3) ಮತ್ತು Q(6, 0) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ PQ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಚಿತ್ರ 3.4 ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಗಮನಿಸುವುದೇನೆಂದರೆ ಈ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಎಲ್ಲಿಯೂ ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅವುಗಳು ಸಮಾಂತರ.



ಚಿತ್ರ 3.4

ಹೀಗೆ, ಒಂದು ಜೊತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದಾದ, ಅನೇಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ನೋಡಿದೆವು. ಅವುಗಳ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಗಳನ್ನು ನೋಡಿದೆವು. ಮುಂದಿನ ಕೆಲವು ವಿಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿರುವುದನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳಾಗಿ ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. ಅಫ್ತಾಬ್ ತಮ್ಮ ಮಗಳಲ್ಲಿ ಹೇಳುತ್ತಾರೆ, "ಏಳು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ, ಆಗಿನ ನಿನ್ನ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸು ಏಳು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗಿತ್ತು. ಇನ್ನು ಮೂರು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಕೂಡಾ ಆವತ್ತಿನ ನಿನ್ನ ವಯಸ್ಸಿಗಿಂತ ನನ್ನ ವಯಸ್ಸು ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ". (ಈ ಸಂಗತಿಯು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಲ್ಲವೆ?) ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.
2. ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡದ ತರಬೇತುಗಾರ್ತಿ 3 ಬ್ಯಾಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 6 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ₹ 3900 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಆ ಬಳಿಕ ಅದೇ ರೀತಿಯ ಇನ್ನೊಂದು ಬ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು ಇನ್ನೂ 3 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ₹ 1300ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.
3. ಒಂದು ದಿನ 2 kg ಸೇಬು ಮತ್ತು 1 kg ದ್ರಾಕ್ಷಿಯ ಬೆಲೆಯು ₹ 160 ಆಗಿರುವುದು ಕಂಡುಬಂತು. ಒಂದು ತಿಂಗಳ ಬಳಿಕ 4 kg ಸೇಬು ಮತ್ತು 2 kg ದ್ರಾಕ್ಷಿಗಳ ಬೆಲೆಯು ₹ 300 ಆಗಿತ್ತು. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿ.

3.3 ನಕ್ಷೆಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರ:

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳಾಗಿ ನಾವು ಹೇಗೆ ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸಬಹುದು, ಅಥವಾ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಬಹುದು, ಅಥವಾ ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು ನೋಡಿರುವಿರಿ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ನಮಗೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ಹೇಗೆ? ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದ ನಾವಿದನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ, ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಹಿಂದಿನ ಒಂದೊಂದೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತಾ ಹೋಗೋಣ.

• ಉದಾಹರಣೆ 1ರ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, ದೈತ್ಯಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಅಖಿಲಾ ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಿದಳು ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಬಾರಿ ಹೂಪ್ಲಾ ಆಡಿದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಚಿತ್ರ 3.2 ರಲ್ಲಿ, ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (4,2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ, ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗುರುತಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, (4,2) ಎಂಬ ಬಿಂದುವು $x - 2y = 0$ ಮತ್ತು $3x + 4y = 20$ ಎಂಬ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆಯೂ ಇದೆ ಹಾಗೂ ಇದು ಏಕಮಾತ್ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು.

ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ $x = 4$, $y = 2$ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ನಾವು ತಾಳೆ ನೋಡೋಣ. x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿಯೂ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, $4 - 2 \times 2 = 0$ ಮತ್ತು $3(4) + 4(2) = 20$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 4$, $y = 2$ ಎಂಬುದು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ

ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ತಾಳೆ ನೋಡಿದೆವು. **ಎರಡು ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆಯೂ ಇರುವ ಏಕಮಾತ್ರ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು (4, 2) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಈ ಜೋಡಿಗೆ ಒಂದು ಮತ್ತು ಒಂದೇ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಿದೆ.**

ಹೀಗೆ, ಅಖಿಲಾಳು 2 ಬಾರಿ ದೈತ್ಯಚಕ್ರದಲ್ಲಿ ಸವಾರಿ ಮಾಡಿದ್ದಾಳೆ ಮತ್ತು 4 ಬಾರಿ ಹೂಪ್ಲಾ ಆಟವಾಡಿದ್ದಾಳೆ.

• 2ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

ಚಿತ್ರ 3.3 ರಲ್ಲಿ, ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಒಂದು ಜೊತೆ ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆಯ ಮುಖಾಂತರ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಆ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು ಅವುಗಳ ಮೇಲಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ.

ಈ ರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುಗಳಿವೆಯೆ? ನಕ್ಷೆಯಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿರುವ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಎರಡೂ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, $2x + 3y = 9$ ಮತ್ತು $4x + 6y = 18$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ **ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.** ಇದು ನಮ್ಮನ್ನು ಅಚ್ಚರಿಗೊಳಿಸಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಯಾಕೆಂದರೆ ಸಮೀಕರಣ $4x + 6y = 18$ ನ್ನು 2ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, $2x + 3y = 9$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇದು (1)ನೇ ಸಮೀಕರಣವೇ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಈ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳೂ ಸಮಬೆಲೆಯುಳ್ಳದ್ದಾಗಿವೆ. ನಕ್ಷೆಯಿಂದ, ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಪೆನ್ಸಿಲ್ ಮತ್ತು ರಬ್ಬರ್‌ಗೆ ಒಂದು ಬೆಲೆಯಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆ ಇದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 3 ಮತ್ತು ₹ 1 ಆಗಿರಬಹುದು. ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ ₹ 3.75 ಮತ್ತು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆ ₹ 0.50 ಆಗಿರಬಹುದು ಇತ್ಯಾದಿ.

• ಉದಾಹರಣೆ 3 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೆ?

ಚಿತ್ರ 3.4 ರಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗಿದೆ. ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಎಂದಿಗೂ ಛೇದಿಸದೇ ಇರುವುದರಿಂದ, ಹಳಿಗಳು ಕೂಡಾ ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದೂ ಕೂಡಾ ಇದರಿಂದ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ.

ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲದೇ ಇರುವ ಒಂದು ಜೊತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ *ಅಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಒಂದು ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ *ಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಜೊತೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವಿಭಿನ್ನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಇಂತಹ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ *ಅವಲಂಬಿತ ಜೋಡಿ* ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಒಂದು ಅವಲಂಬಿತ ಜೋಡಿಯು ಯಾವಾಗಲೂ ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ವರ್ತನೆ ಮತ್ತು ಪರಿಹಾರಗಳ ಇರುವಿಕೆಯನ್ನು ಈ ಮುಂದಿನಂತೆ ನಾವೀಗ ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸಬಹುದು.

(i) ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿರುತ್ತದೆ. (ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ)

(ii) ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. (ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಸ್ಥಿರ ಜೋಡಿ)

(iii) ರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ. [ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅವಲಂಬಿತ (ಸ್ಥಿರ) ಜೋಡಿ].

ನಾವೀಗ 1, 2 ಮತ್ತು 3ನೇ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮಿಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ ಹಾಗೂ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಯಾವ ರೀತಿಯ ಜೋಡಿಗಳೆಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ.

(i) $x - 2y = 0$ ಮತ್ತು $3x + 4y - 20 = 0$ (ರೇಖೆಗಳು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ ಮತ್ತು $4x + 6y - 18 = 0$ (ರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $2x + 4y - 12 = 0$ (ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರ)

ನಾವೀಗ ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ಮತ್ತು $\frac{c_1}{c_2}$ ಗಳನ್ನು ಬರೆದುಕೊಂಡು ಅವುಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ a_1, b_1, c_1 ಮತ್ತು a_2, b_2, c_2 ಗಳು ವಿಭಾಗ 3.2 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ, ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3.4

ಕ್ರ.ಸಂ	ರೇಖೆಗಳ ಜೋಡಿ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಿ	ನಕ್ಷಾ ರೂಪದ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ	ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆ
1	$x - 2y = 0$ $3x+4y-20=0$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು	ನಿಖರವಾಗಿ ಒಂದು ಪರಿಹಾರ (ಅನನ್ಯ)
2	$2x+3y-9=0$ $4x+6y-18=0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$	ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆಗಳು	ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳು
3	$x+2y-4=0$ $2x+4y-12=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$	ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು	ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲ

ಮೇಲಿನ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ,

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ಮತ್ತು $$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು

(i) ಛೇದಿಸಿದರೆ, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) ಐಕ್ಯಗೊಂಡರೆ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(iii) ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸರಳರೇಖಾ ಜೋಡಿಗೆ ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಕೂಡಾ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೀವೇ ಪರಿಗಣಿಸುವ ಮೂಲಕ ನೀವು ಅವುಗಳನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಇದನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4:

$$x + 3y = 6 \qquad (1)$$

ಮತ್ತು $$2x - 3y = 12 \qquad (2)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸ್ಥಿರವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

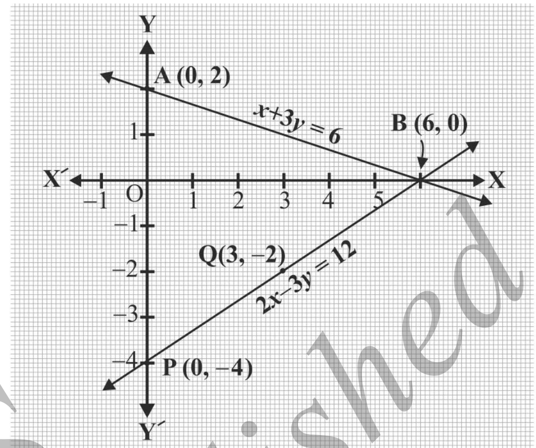
ಪರಿಹಾರ: (1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಯನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಇದಕ್ಕಾಗಿ, ಕೋಷ್ಟಕ 3.5 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಎರಡೆರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು.

ಕೋಷ್ಟಕ 3.5

x	0	6
$y = \frac{6 - x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x - 12}{3}$	-4	-2

ಚಿತ್ರ 3.5 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ A (0, 2), B (6, 0), P (0, –4) ಮತ್ತು Q (3, –2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ AB ಮತ್ತು PQ ರೇಖೆಗಳುಂಟಾಗುವಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 3.5

AB ಮತ್ತು PQ ಈ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವಂತೆ B (6, 0) ಎಂಬ ಬಿಂದು ಇರುವುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ $x = 6$ ಮತ್ತು $y = 0$ ಎಂಬುದು ಪರಿಹಾರ. ಅಂದರೆ, ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲವೆ? ಏಕೈಕ ಪರಿಹಾರವಿದೆಯೆ? ಅಥವಾ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

ಪರಿಹಾರ: ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು $\frac{5}{3}$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$5x - 8y + 1 = 0$$

ಆದರೆ ಇದು ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿದೆ. ಹೀಗೆ (1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲ್ಪಡುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ (1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

ಗ್ರಾಫ್‌ನ ಮೇಲೆ ಕೆಲವು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಅದನ್ನು ನೀವೇ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: ಚಂಪಾಳು ಕೆಲವು ಪ್ಯಾಂಟ್ ಮತ್ತು ಲಂಗಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಲು ಒಂದು ಮಾರಾಟ ಮಳಿಗೆಗೆ ಹೋದಳು. ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನು ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ಖರೀದಿಸಿದಳೆಂದು ಅವಳ ಗೆಳತಿಯರು ಕೇಳಿದಾಗ ಅವಳು ಹೀಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿದಳು. 'ಖರೀದಿಸಿದಂತಹ ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ಯಾಂಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಇಮ್ಮಡಿಗಿಂತ ಎರಡು ಕಡಿಮೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಖರೀದಿಸಿದಂತಹ ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಪ್ಯಾಂಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ನಾಲ್ಕು ಪಟ್ಟಿಗಿಂತ ನಾಲ್ಕು ಕಡಿಮೆ'. ಚಂಪಾ ಎಷ್ಟು ಪ್ಯಾಂಟ್ ಮತ್ತು ಎಷ್ಟು ಲಂಗಗಳನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅವಳ ಗೆಳತಿಯರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಪ್ಯಾಂಟ್‌ಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು x ನಿಂದಲೂ, ಲಂಗಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು y ಯಿಂದಲೂ ನಾವು ಗುರುತಿಸೋಣ. ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

ಮತ್ತು

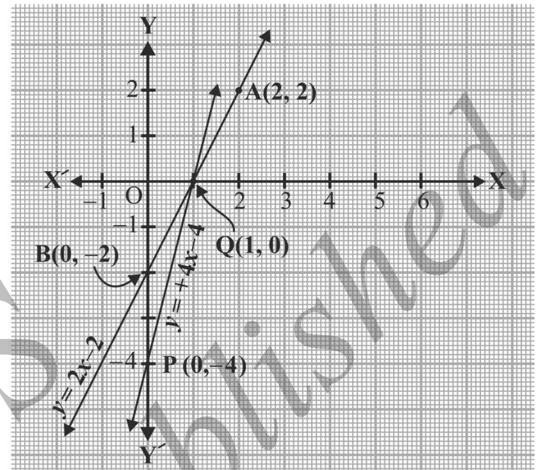
$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೂ ಎರಡೆರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಮೂಲಕ ನಾವು (1) ಮತ್ತು (2) ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸೋಣ. ಕೋಷ್ಟಕ 3.6 ರಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೋಷ್ಟಕ 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0



ಚಿತ್ರ 3.6

ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಚಿತ್ರ 3.6 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ಅವುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವಂತೆ ಸರಳರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳು (1, 0) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪರಿಹಾರ $x = 1$, $y = 0$ ಅಂದರೆ ಅವಳು ಒಂದು ಪ್ಯಾಂಟ್‌ನ್ನು ಖರೀದಿಸಿದಳು ಮತ್ತು ಅವಳು ಲಂಗವನ್ನು ಖರೀದಿಸಲಿಲ್ಲ.

ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಈ ಬೆಲೆಗಳು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತವೆಯೇ ಎಂದು **ತಾಳೆನೋಡಿ.**

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) X ತರಗತಿಯ 10 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಣಿತ ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದರು. ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆಗಿಂತ, ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಯು 4 ಹೆಚ್ಚಾಗಿದ್ದರೆ, ರಸಪ್ರಶ್ನೆಯಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದ ಹುಡುಗರ ಮತ್ತು ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (ii) 5 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 7 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 50. ಹಾಗೆಯೇ 7 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 5 ಪೆನ್ನುಗಳ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 46. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಹಾಗೂ ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆ? ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಐಕ್ಯಗೊಂಡಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $5x - 4y + 8 = 0$ (ii) $9x + 3y + 12 = 0$

$7x + 6y - 9 = 0$ $18x + 6y + 24 = 0$

(i) $6x - 3y + 10 = 0$

$2x - y + 9 = 0$

3. $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}$ ಮತ್ತು $\frac{c_1}{c_2}$ ಅನುಪಾತಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆಯೆ? ಅಥವಾ ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆಯೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$ (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

(ii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$ (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

(ii) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. ಮುಂದೆ ನೀಡಿದವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು ಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ/ ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿವೆ? ಸ್ಥಿರವಾಗಿದ್ದರೆ, ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಿಂದ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

(i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

(ii) $x - y = 8$ $3x - 3y = 16$

(iii) $2x + y - 6 = 0$ $4x - 2y - 4 = 0$

(iv) $2x - 2y - 2 = 0$ $4x - 4y - 5 = 0$

5. ಉದ್ದವು ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ 4m ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಆಯತಾಕಾರದ ಒಂದು ಹೂದೋಟದ ಸುತ್ತಳತೆಯ ಅರ್ಧವು 36m. ಹೂದೋಟದ ಅಳತೆಗಳನ್ನು ಕಮಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y - 8 = 0$ ಯನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ, ಹೇಗೆಂದರೆ ಉಂಟಾದಂತಹ ಜೋಡಿಗಳ ರೇಖಾಗಣಿತೀಯ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರಬೇಕು.

(i) ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಗಳು (ii) ಸಮಾಂತರ ರೇಖೆಗಳು

(iii) ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ರೇಖೆಗಳು

7. $x - y + 1 = 0$ ಮತ್ತು $3x + 2y - 12 = 0$ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು $x-$ ಅಕ್ಷದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ ಹಾಗೂ ತ್ರಿಕೋನೀಯ ವಲಯವನ್ನು ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿರಿ.

3.4 ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳು:

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ

ಬಿಂದುವು $(\sqrt{3}, 2\sqrt{7})$, $(-1.75, 3.3)$, $(\frac{4}{13}, \frac{1}{19})$ ಇತ್ಯಾದಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವು ಅನುಕೂಲಕರವಲ್ಲ. ಇಂತಹ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಓದುವಾಗ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳೂ ಇವೆ. ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯಾವುದಾದರೂ ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನವಿದೆಯೆ? ಅನೇಕ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳಿವೆ ಅವುಗಳ ಕುರಿತು ನಾವೀಗ ಚರ್ಚಿಸಲಿದ್ದೇವೆ.

3.4.1 ಆದೇಶ ವಿಧಾನ: ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನಾವು ಆದೇಶ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

$$7x - 15y = 2 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3 \quad (2)$$

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: ನಾವು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವೀಗ ಸಮೀಕರಣ (2)ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

$$x + 2y = 3$$

ಇದನ್ನು ಹೀಗೆ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. $x = 3 - 2y \quad (3)$

ಹಂತ 2: x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

ಅಂದರೆ $21 - 14y - 15y = 2$

ಅಂದರೆ, $-29y = -19$

ಆದ್ದರಿಂದ, $y = \frac{19}{29}$

ಹಂತ 3: y ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪರಿಹಾರವೆಂದರೆ, $x = \frac{49}{29}$, $y = \frac{19}{29}$

ತಾಳೆ: $x = \frac{49}{29}$ ಮತ್ತು $y = \frac{19}{29}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) – ಇವೆರಡಕ್ಕೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೀವು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು.

ಆದೇಶ ವಿಧಾನವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ನಾವದನ್ನು ಹಂತಹಂತವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಹಂತ 1: ನಿಮಗೆ ಅನುಕೂಲಕರವಾದ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣದಿಂದ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು, y ಎಂದಿರಲಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರ ಅಂದರೆ x ನಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 2: y ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ, ಅದನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ, ಅಂದರೆ x ನಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣವನ್ನಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ. ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆ 9 ಮತ್ತು 10 ರಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಲ್ಲದ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ನೀವು ಪಡೆಯಬಹುವುದು. ಈ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವೆಂದಾದರೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆಯೆಂದು ನೀವು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು. ಹೇಳಿಕೆಯು ನಿಜವಲ್ಲವೆಂದಾದರೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿದೆ.

ಹಂತ 3: ಹಂತ 2 ರಲ್ಲಿ ದೊರೆತ x (ಅಥವಾ y) ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಂತ 1 ರಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ ಇನ್ನೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಗಮನಿಸಿ: ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನಾವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ, ಅದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು **ಆದೇಶಿಸಿದ್ದೇವೆ**. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು *'ಆದೇಶ ವಿಧಾನ'* ಎನ್ನಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: ಆದೇಶ ವಿಧಾನದ ಮೂಲಕ ಅಭ್ಯಾಸ 3.1ರ ಪ್ರಶ್ನೆ 1ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಅಫ್ತಾಬ್ ಮತ್ತು ಅವಳ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ) ಕ್ರಮವಾಗಿ s ಮತ್ತು t ಎಂದಿರಲಿ ಆಗ, ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

$$s - 7 = 7\,(t - 7),\ \text{ಅಂದರೆ},\ s - 7t + 42 = 0 \qquad (1)$$

ಮತ್ತು

$$s + 3 = 3(t + 3),\ \text{ಅಂದರೆ},\ s - 3t = 6 \qquad (2)$$

ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ $s = 3t + 6$

s ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

$$4t = 48,$$

ಅಂದರೆ

$$t = 12$$

t ಯ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಫ್ತಾಬ್ ಮತ್ತು ಅವರ ಮಗಳ ವಯಸ್ಸು ಕ್ರಮವಾಗಿ 42 ಮತ್ತು 12 ವರ್ಷಗಳಾಗಿವೆ.

ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಇದು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆಯೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವ ಮೂಲಕ ಈ ಉತ್ತರವನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: ವಿಭಾಗ 3.3 ರಲ್ಲಿರುವ ಉದಾಹರಣೆ 2ನ್ನು ನೋಡೋಣ, 2 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 3 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ₹9 ಮತ್ತು 4 ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು 6 ರಬ್ಬರ್‌ಗಳ ಬೆಲೆ ₹18. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಉಂಟಾದಂತಹ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ ಎಂದರೆ,

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

ನಾವು ಮೊದಲಿಗೆ x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು y ಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಸಮೀಕರಣ $2x + 3y = 9$ ರಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ,

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

ಈಗ ನಾವು x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

ಅಂದರೆ, $18 - 6y + 6y = 18$

ಅಂದರೆ, $18 = 18$

y ಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ನಿಜವಾಗಿದೆ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ, y ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆ ಪರಿಹಾರವಾಗಿ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ x ಗೆ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳೆರಡೂ ಸಮಾನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಪರಿಸ್ಥಿತಿ ಉಂಟಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ಕ್ಕೆ *ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.* ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಲ್ಲೂ ಕೂಡಾ ನಮಗೆ ಇದೇ ಪರಿಹಾರ ಸಿಕ್ಕಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ವಿಭಾಗ 3.2 ರಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 3.3ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ಒಂದು ರಬ್ಬರ್‌ನ ಅನನ್ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಯಾಕೆಂದರೆ ದತ್ತ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುವ ಅನೇಕ ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: ವಿಭಾಗ 3.2 ರಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆ 3ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುತ್ತವೆಯೆ?

ಪರಿಹಾರ : ರಚಿತವಾದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳೆಂದರೆ,

$$x + 2y - 4 = 0 \quad (1)$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \quad (2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ x ನ್ನು y ಯಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದಾಗ,

$$x = 4 - 2y$$

x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (2) ರಲ್ಲಿ ನಾವು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

ಅಂದರೆ, $8 - 12 = 0$

ಅಂದರೆ, $-4 = 0$

ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಅಸಂಬದ್ಧವಾಗಿದೆ,

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಹಾಗಾಗಿ ಎರಡು ಹಳಿಗಳು ಒಂದನ್ನೊಂದು ಛೇದಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ.

(i) $x + y = 14$

$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$

$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$

$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$

$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{3}\,y = 0$

$\sqrt{3}\,x - \sqrt{8}\,y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x+3y = 11$ ಮತ್ತು $2x - 4y = -24$ ನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಇದರಿಂದ $y = mx + 3$ ರಲ್ಲಿ m ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಆದೇಶ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 26 ಮತ್ತು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಇನ್ನೊಂದರ ಮೂರರಷ್ಟಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಎರಡು ಪರಿಪೂರಕ ಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಕೋನವು ಚಿಕ್ಕ ಕೋನಕ್ಕಿಂತ 18 ಡಿಗ್ರಿ ಅಧಿಕವಾಗಿದೆ. ಅವುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iii) ಕ್ರಿಕೆಟ್ ತಂಡವೊಂದರ ತರಬೇತುಗಾರ್ತಿಯು 7 ಬ್ಯಾಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 6 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ₹ 3800 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಆ ಬಳಿಕ 3 ಬ್ಯಾಟ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 5 ಚೆಂಡುಗಳನ್ನು ಅವರು ₹ 1750 ಕ್ಕೆ ಕೊಳ್ಳುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(iv) ಒಂದು ನಗರದಲ್ಲಿ ಟ್ಯಾಕ್ಸಿ ಬಾಡಿಗೆಯು ಎರಡು ಭಾಗಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದೆ. ಮೊದಲನೆಯದು ನಿಗದಿತ ಬಾಡಿಗೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯದು ಚಲಿಸಿದ ದೂರಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಬಾಡಿಗೆ. ಇವೆರಡನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆಯು 10km ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ₹ 105 ಮತ್ತು 15km ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ₹ 155. ಹಾಗಾದರೆ ನಿಗದಿತ ಬಾಡಿಗೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋಮೀಟರ್‌ನ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಬಾಡಿಗೆ ದರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಒಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿಯು 25km ದೂರವನ್ನು ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ನೀಡಬೇಕಾದ ಒಟ್ಟು ಬಾಡಿಗೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(v) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡಕ್ಕೂ 2ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ, ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು $\frac{9}{11}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅದೇ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳೆರಡಕ್ಕೂ 3ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{5}{6}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(vi) ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ಜೇಕಬ್‌ರ ವಯಸ್ಸು ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರರಷ್ಟಾಗುತ್ತದೆ. ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ಜೇಕಬ್‌ರ ವಯಸ್ಸು ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸಿನ ಏಳರಷ್ಟಿತ್ತು ಅವರಿಬ್ಬರ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸು ಎಷ್ಟು?

3.4.2 ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ:

ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ (ಅಂದರೆ ರದ್ದುಗೊಳಿಸುವ) ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವೀಗ ನೋಡೋಣ. ಇದು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಆದೇಶ ವಿಧಾನಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲಕರವಾಗಿದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆಂದು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯಗಳ ಅನುಪಾತ 9:7 ಮತ್ತು ಅವರ ಖರ್ಚುಗಳ ಅನುಪಾತ 4:3 ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರು ಕೂಡಾ ತಿಂಗಳಿಗೆ ₹ 2000 ಉಳಿತಾಯ ಮಾಡಿದರೆ ಅವರ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಆದಾಯವನ್ನು ₹ $9x$ ಮತ್ತು ₹ $7x$ ನಿಂದಲೂ ಖರ್ಚುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 4y ಮತ್ತು ₹ 3y ಯಿಂದಲೂ ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

ಮತ್ತು $$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

ಹಂತ 1: ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 3 ರಿಂದಲೂ, ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು 4 ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, y ಯ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಾನಗೊಳಿಸಿ. ಈಗ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

ಹಂತ 2: y ಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸಲು ಸಮೀಕರಣ (3)ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (4) ರಿಂದ ಕಳೆಯಿರಿ, ಯಾಕೆಂದರೆ, y ಯ ಸಹಗುಣಕಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿವೆ.

$$(28x - 27x) - (12y + 12y) = 8000 - 6000$$

ಅಂದರೆ, $$x = 2000$$

ಹಂತ 3: x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$9\ (2000) - 4y = 2000$$

ಅಂದರೆ, $$y = 4000$$

ಹೀಗೆ, $x = 2000$, $y = 4000$ ಎಂಬುದು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಆ ಇಬ್ಬರು ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ಮಾಸಿಕ ಆದಾಯಗಳು ₹ 18000 ಮತ್ತು ₹ 14000.

ತಾಳೆ: 18000 : 14000 = 9:7 ಅಲ್ಲದೆ ಅವರ ಖರ್ಚುಗಳಿಗಿರುವ ಅನುಪಾತ =18000 – 2000 : 14000 – 2000 = 16000 : 12000 = 4:3

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಏಕೆಂದರೆ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಮೊದಲು ವರ್ಜಿಸಿ, ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು y ಯನ್ನು ವರ್ಜಿಸಿದೆವು. ನಾವು xನ್ನು ಕೂಡಾ ವರ್ಜಿಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ.
2. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ನೀವು ಆದೇಶ ವಿಧಾನ ಅಥವಾ ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೂಡಾ ಬಳಸಬಹುದಾಗಿತ್ತು. ಇವುಗಳನ್ನೂ ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿಮಗೆ ಯಾವ ವಿಧಾನವು ಹೆಚ್ಚು ಅನುಕೂಲಕರವೆಂದು ತಿಳಿಯಿರಿ.

ನಾವೀಗ ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿರುವ ಈ ಹಂತಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

ಹಂತ 1: ಚರಾಕ್ಷರಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ (x ಅಥವಾ y ಯ) ಸಹಗುಣಕಗಳು ಸಮವಾಗುವ ಹಾಗೆ, ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಸೂಕ್ತವಾದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ (ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಬಿಟ್ಟು).

ಹಂತ 2: ಆ ಬಳಿಕ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವು ವರ್ಜಿಸಲ್ಪಡುವಂತೆ ಒಂದು ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಕೂಡಿಸಿರಿ ಅಥವಾ ಕಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಒಂದೇ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಸಮೀಕರಣವು ನಿಮಗೆ ದೊರೆತರೆ 3ನೇ ಹಂತಕ್ಕೆ ಹೋಗಿ.

2ನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ನೈಜ ಹೇಳಿಕೆ ನಮಗೆ ದೊರೆತರೆ ಆಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ.

2ನೇ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಲ್ಲದ ಒಂದು ಅಸಂಬದ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ ನಮಗೆ ದೊರೆತರೆ, ಆಗ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೂಲ ಜೋಡಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ ಅದು ಅಸ್ಥಿರ.

ಹಂತ 3: ಹೀಗೆ ದೊರೆತ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ (x ಅಥವಾ y) ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ ಅದರ ಬೆಲೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಹಂತ 4: x ನ (ಅಥವಾ y ಯ) ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮೂಲ ಸಮೀಕರಣವೊಂದರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ.

ಇದನ್ನು ನಿದರ್ಶಿಸಲು ನಾವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 12: ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2x + 3y = 8 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 7 \qquad (2)$$

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 2 ರಿಂದಲೂ, ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು 1 ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿ, x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಸಮಗೊಳಿಸಿರಿ. ಈಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,

$$4x + 6y = 16 \qquad (3)$$

$$4x + 6y = 7 \qquad (4)$$

ಹಂತ 2: ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (4) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

ಅಂದರೆ, $0 = 9$

ಇದೊಂದು ಅಸಂಬದ್ಧ ಹೇಳಿಕೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 13: ಎರಡಂಕೆಗಳ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಅದರ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಮೊತ್ತ 66. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಂಕೆಗಳಿಗಿರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 2 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ?

ಪರಿಹಾರ: ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನ ಮತ್ತು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ x ಮತ್ತು y ಎಂದಿರಲಿ. ಆದ್ದರಿಂದ ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ವಿಸ್ತಾರ ರೂಪದಲ್ಲಿ $10x + y$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು [ಉದಾಹರಣೆಗೆ $56 = 10(5) + 6$]

ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ, x ಬಿಡಿಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು y ಹತ್ತರ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯು ವಿಸ್ತಾರ ರೂಪದಲ್ಲಿ $10y + x$ ಆಗುತ್ತದೆ. [ಉದಾಹರಣೆಗೆ 56ರ ಅಂಕೆಗಳನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ, $65 = 10(6) + 5$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ].

ದತ್ತ ನಿಬಂಧನೆಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ,

$$(10x + y) + (10x + y) = 66$$

ಅಂದರೆ, $11(x + y) = 66$

ಅಂದರೆ, $x + y = 6 \qquad (1)$

ಅಂಕೆಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು 2 ಎನ್ನಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$$x - y = 2 \qquad (2)$$

ಅಥವಾ $y - x = 2 \qquad (3)$

$x - y = 2$ ಆದರೆ, (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $x = 4$, $y = 2$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 42.

$y - x = 2$ ಆದರೆ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿದಾಗ

$x = 2$, $y = 4$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯು 24.

ಹೀಗೆ, ಇಂತಹ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ 42 ಮತ್ತು 24

ತಾಳೆ : ಇಲ್ಲಿ $42 + 24 = 66$ ಮತ್ತು $4 - 2 = 2$. ಅಲ್ಲದೆ $24 + 42 = 66$ ಮತ್ತು $4 - 2 = 2$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಆದೇಶ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   (i) $x + y = 5$ ಮತ್ತು $2x - 3y = 4$

   (ii) $3x + 4y = 10$ ಮತ್ತು $2x - 2y = 2$

   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ ಮತ್ತು $9x = 2y + 7$

   (iii) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ ಮತ್ತು $x - \frac{y}{3} = 3$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು (ಇರುವುದಾದರೆ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ, ಛೇದದಿಂದ 1ನ್ನು ಕಳೆದು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದರೆ, 1 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದಕ್ಕೆ 1ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಅದು $\frac{1}{2}$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಯಾವುದು?

   (ii) ಐದು ವರ್ಷಗಳ ಹಿಂದೆ ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಆಗಿತ್ತು. ಹತ್ತು ವರ್ಷಗಳ ಬಳಿಕ ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ನೂರಿ ಮತ್ತು ಸೋನುವಿನ ಈಗಿನ ವಯಸ್ಸೆಷ್ಟು?

   (iii) ಎರಡಂಕೆಯ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂಕೆಗಳ ಮೊತ್ತ 9. ಇದರಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅದಲು ಬದಲು ಮಾಡಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇಮ್ಮಡಿಗೊಳಿಸಿದರೆ, ಅದು ಮೊದಲನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಒಂಭತ್ತರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗುತ್ತದೆ. ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (iv) ₹ 2000 ವನ್ನು ಹಿಂಪಡೆಯಲು ಮೀನಾ ಬ್ಯಾಂಕಿಗೆ ಹೋದಳು. ಅವಳು ನಗದು ಗುಮಾಸ್ತರಲ್ಲಿ ₹ 50 ಮತ್ತು ₹ 100 ರ ನೋಟುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ನೀಡುವಂತೆ ಹೇಳಿದಳು. ಮೀನಾಳಿಗೆ ಒಟ್ಟು 25 ನೋಟುಗಳು ದೊರೆತವು. ₹ 50 ರ ಮತ್ತು ₹ 100 ರ ಎಷ್ಟೆಷ್ಟು ನೋಟುಗಳನ್ನು ಅವಳು ಪಡೆದಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (v) ಒಂದು ಎರವಲು ಗ್ರಂಥಾಲಯದಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಮೂರು ದಿನಕ್ಕೆ ಒಂದು ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕವಿರುತ್ತದೆ. ಆ ಬಳಿಕದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ದಿನಕ್ಕೂ ಒಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಶುಲ್ಕವಿರುತ್ತದೆ. ಪುಸ್ತಕವನ್ನು ಏಳು ದಿನ ತನ್ನಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಸರಿತಾ ₹ 27 ನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದರೆ, ಪುಸ್ತಕವನ್ನು 5 ದಿನ

ಇರಿಸಿಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕಾಗಿ ಸೂಸಿ ₹ 21 ನ್ನು ಪಾವತಿಸಿದಳು. ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ದಿನದ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.4.3 ಓರೆ – ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ

ಇಲ್ಲಿಯ ತನಕ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯೊಂದನ್ನು ನಕ್ಷಾ ಕ್ರಮ, ಆದೇಶ ಮತ್ತು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಲಿತಿರಿ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಇನ್ನೊಂದು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನವನ್ನು ನಾವಿಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಅನೇಕ ಕಾರಣಗಳಿಂದ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಇದೊಂದು ಉಪಯುಕ್ತ ವಿಧಾನವಾಗಿದೆ. ಮುಂದುವರಿಯುವ ಮೊದಲು ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

5 ಕಿತ್ತಳೆ ಮತ್ತು 3 ಸೇಬು ಹಣ್ಣುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 35 ಹಾಗೂ 2 ಕಿತ್ತಳೆ ಮತ್ತು 4 ಸೇಬು ಹಣ್ಣುಗಳ ಬೆಲೆ ₹ 28. ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೇಬಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ x ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೇಬಿನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ₹ y ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ. ಆಗ ಉಂಟಾಗುವ ಸಮೀಕರಣಗಳೆಂದರೆ,

$$5x + 3y = 35, \text{ ಅಂದರೆ } 5x + 3y - 35 = 0 \qquad (1)$$

$$2x + 4y = 28, \text{ ಅಂದರೆ } 2x + 4y - 28 = 0 \qquad (2)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು 4ರಿಂದಲೂ, ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು 3 ರಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿದಾಗ,

$$4(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \qquad (3)$$

$$3(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \qquad (4)$$

ಸಮೀಕರಣ (3) ರಿಂದ ಸಮೀಕರಣ (4) ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ,

$$[(5)(4) - (3)(2)]\, x + [(4)(3) - (3)(4)]\, y + [(4)(-35) - (3)(-28)] = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \dfrac{-[(4)(-35) - (3)(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$

ಅಂದರೆ, $y = \dfrac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)}$ (5)

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ನ್ನು $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಎಂದು ಬರೆದುಕೊಂಡರೆ,

$a_1 = 5,\ b_1 = 3,\ c_1 = -35,\ a_2 = 2,\ b_2 = 4,\ c_2 = -28$

ಆಗ ಸಮೀಕರಣ (5) ನ್ನು $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, $y = \dfrac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$

ಸಮೀಕರಣ (5) ನ್ನು ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿದಾಗ,

$$x = \frac{-84 + 140}{20 - 6} = 4$$

ಇದೇ ಪ್ರಕಾರ, $y = \dfrac{(-35)(2) - (5)(-28)}{20 - 6} = \dfrac{-70 + 140}{14} = 5$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = 4$, $y = 5$ ಎಂಬುದು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರ. ಆಗ, ಒಂದು ಕಿತ್ತಳೆಯ ಬೆಲೆ ₹ 4 ಮತ್ತು ಒಂದು ಸೇಬಿನ ಬೆಲೆ ₹ 5.

ತಾಳೆ: 5 ಕಿತ್ತಳೆಯ ಬೆಲೆ + 3 ಸೇಬಿನ ಬೆಲೆ = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35.

2 ಕಿತ್ತಳೆಯ ಬೆಲೆ + 4 ಸೇಬಿನ ಬೆಲೆ = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28.

ನಾವೀಗ, ಮೇಲೆ ತಿಳಿಸಿದ ವಿಧಾನವು,

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (1)$$

ಮತ್ತು

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ಯಾವುದೇ ರೂಪದ ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೇಲೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1: ಸಮೀಕರಣ (1) ನ್ನು b_2 ನಿಂದಲೂ, ಸಮೀಕರಣ (2) ನ್ನು b_1 ನಿಂದಲೂ ಗುಣಿಸಿದಾಗ

$$b_2 a_1 x + b_2 b_1 y + b_2 c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \quad (4)$$

ಹಂತ 2: ಸಮೀಕರಣ (4) ನ್ನು (3) ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ,

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2)x + (b_2 b_1 - b_1 b_2)y + (b_2 c_1 - b_1 c_2) = 0$$

ಅಂದರೆ, $(b_2 a_1 - b_1 a_2)x = b_1 c_1 - b_2 c_1$

ಆದ್ದರಿಂದ $x = \dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ಆದಾಗ (5)

ಹಂತ 3: x ನ ಈ ಬೆಲೆಯನ್ನು (1) ಅಥವಾ (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (6)$$

ಈಗ ಎರಡು ಪ್ರಕರಣಗಳು ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತವೆ.

ಪ್ರಕರಣ 1: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ಆಗ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ

ಜೋಡಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿರುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಕರಣ 2: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. ಇಲ್ಲಿ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ ಎಂದು ನಾವು ಬರೆದುಕೊಂಡರೆ,

$$a_1 = ka_2, \ b_1 = kb_2$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ a_1 ಮತ್ತು b_1 ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$k(a_2 x + b_2 y) + c_1 = 0 \qquad (7)$$

ಸಮೀಕರಣ (7) ಮತ್ತು (2) ಇವೆರಡೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಬೇಕಾದರೆ, $c_1 = kc_2$ ಅಂದರೆ $\frac{c_1}{c_2} = k$ ಆಗಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

$c_1 = kc_2$ ಆದರೆ, ಸಮೀಕರಣ (2) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವೂ ಸಮೀಕರಣ (1) ಕ್ಕೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ ಆದರೆ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯಾದ (1) ಮತ್ತು (2) ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ.

$c_1 \neq kc_2$ ಆದರೆ ಸಮೀಕರಣ (1) ರ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವೂ ಸಮೀಕರಣ (2) ಕ್ಕೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗಲಾರದು ಮತ್ತು ಇದರ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಜೋಡಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

(1) ಮತ್ತು (2) ಎಂಬ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯ ಬಗೆಗಿನ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೀಗೆ ಸಾರಾಂಶೀಕರಿಸಬಹುದು.

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ಆದಾಗ, ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿರುತ್ತದೆ.

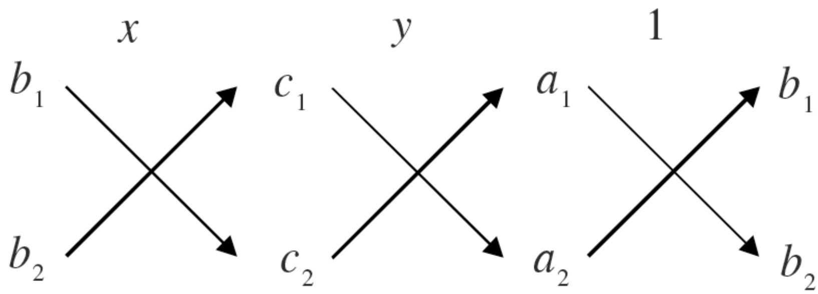
(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ಆದಾಗ, ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ಆದಾಗ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ.

ಸಮೀಕರಣ (5) ಮತ್ತು (6) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾದ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad (8)$$

ಮೇಲಿನ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನೆನಪಿರಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ ಚಿತ್ರವು ನಿಮಗೆ ಸಹಕಾರಿಯಾಗಬಹುದು:



ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಡುವಿನ ಬಾಣದ ಚಿಹ್ನೆಗಳು ಆ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸಬೇಕೆಂಬುದನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಎರಡನೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಮೊದಲನೆಯದರಿಂದ ಕಳೆಯಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1: ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (1) ಮತ್ತು (2) ರ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 2: ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು (8) ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿದಂತೆ ಬರೆಯಿರಿ.

ಹಂತ 3: $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ಆದಾಗ, x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಓರೆ ಗುಣಕಾರ ವಿಧಾನ ಎಂದು ಯಾಕೆ ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಮೇಲೆ ನೀಡಿದ ಹಂತ 2 ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

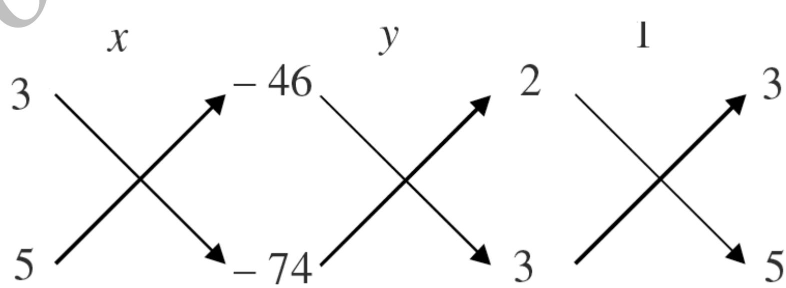
ಉದಾಹರಣೆ 14: ಬೆಂಗಳೂರು ಕೆಂಪೇಗೌಡ ಬಸ್ಸು ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ, ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂಗೆ 2 ಟಿಕೇಟು ಮತ್ತು ಯಶವಂತಪುರಕ್ಕೆ 3 ಟಿಕೇಟನ್ನು ಕೊಂಡರೆ, ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 46. ಆದರೆ ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂಗೆ 3 ಟಿಕೇಟು ಮತ್ತು ಯಶವಂತಪುರಕ್ಕೆ 5 ಟಿಕೇಟುಗಳನ್ನು ಕೊಂಡರೆ ಒಟ್ಟು ಬೆಲೆ ₹ 74. ಬಸ್ಸು ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂಗೆ ಮತ್ತು ಯಶವಂತಪುರಕ್ಕೆ ಇರುವ ಟಿಕೇಟು ದರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಬೆಂಗಳೂರಿನಲ್ಲಿ ಕೆಂಪೇಗೌಡ ಬಸ್ಸು ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಇರುವ ಟಿಕೇಟು ದರವು ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂಗೆ ₹ x ಮತ್ತು ಯಶವಂತಪುರಕ್ಕೆ ₹ y ಆಗಿರಲಿ. ದತ್ತ ಮಾಹಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ,

$$2x + 3y = 46, \text{ ಅಂದರೆ } 2x + 3y - 46 = 0 \qquad (1)$$

$$3x + 5y = 74, \text{ ಅಂದರೆ } 3x + 5y - 74 = 0 \qquad (2)$$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಲು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದಂತೆ ನಾವು ಚಿತ್ರ ರಚಿಸುತ್ತೇವೆ.



ಆಗ, $\dfrac{x}{(3)(-74) - (5)(-46)} = \dfrac{y}{(-46)(3) - (-74)(2)} = \dfrac{1}{(2)(5) - (3)(3)}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{-222 + 230} = \dfrac{y}{-138 + 148} = \dfrac{1}{10 - 9}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{8} = \dfrac{y}{10} = \dfrac{1}{1}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{x}{8} = \dfrac{1}{1}$ ಮತ್ತು $\dfrac{y}{10} = \dfrac{1}{1}$

ಅಂದರೆ, $x = 8$ ಮತ್ತು $y = 10$

ಹೀಗೆ, ಬೆಂಗಳೂರಿನಲ್ಲಿ ಕೆಂಪೇಗೌಡ ಬಸ್ಸು ನಿಲ್ದಾಣದಿಂದ ಮಲ್ಲೇಶ್ವರಂಗೆ ಟಿಕೇಟು ದರ ₹ 8 ಮತ್ತು ಯಶವಂತಪುರಕ್ಕೆ ಟಿಕೇಟು ದರ ₹ 10.

ತಾಳೆ: ನಮಗೆ ಸಿಕ್ಕಿದ ಪರಿಹಾರವು ಸರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಮಸ್ಯೆಯಿಂದ ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 15: p ಯ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ, ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿರುತ್ತದೆ?

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$.

ದತ್ತ ಜೋಡಿಗೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವಿರಬೇಕಾದರೆ: $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{4}{2} \neq \dfrac{p}{2}$

ಅಂದರೆ, $p \neq 4$

ಆದ್ದರಿಂದ, 4ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ p ಯ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 16: k ಯ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

ಪರಿಹಾರ: ಇಲ್ಲಿ $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{k}{12}$, $\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{3}{k}$, $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{k - 3}{k}$

ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯೊಂದಕ್ಕೆ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರಬೇಕಾದರೆ:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

ಅಥವಾ, $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

$k^2 = 36$ ಅಂದರೆ, $k = \pm 6$

ಅಲ್ಲದೆ, $\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

$3k = k^2 - 3k$, ಅಂದರೆ, $6k = k^2$, ಇದರ ಅರ್ಥವೆಂದರೆ $k = 0$ ಅಥವಾ $k = 6$.

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೂ ಸರಿಹೊಂದುವ k ಯ ಬೆಲೆ ಎಂದರೆ $k = 6$ ಈ ಬೆಲೆಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ ಅಥವಾ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ? ಯಾವುದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಿಲ್ಲ? ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ ಇರುವುದಾದರೆ ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) $x - 3y - 3 = 0$
   $3x - 9y - 2 = 0$

   (ii) $2x + y = 5$
   $3x + 2y = 8$

   (iii) $3x - 5y = 20$
   $6x - 10y = 40$

   (iv) $x - 3y - 7 = 0$
   $3x - 3y - 15 = 0$

2. i) a ಮತ್ತು b ಗಳ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ?

   $2x + 3y = 7$

   $(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$

   ii) k ಯ ಯಾವ ಬೆಲೆಗೆ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ?

   $3x + y = 1$

   $(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$

3. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಆದೇಶ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನಗಳಿಂದ ಬಿಡಿಸಿರಿ.

   $8x + 5y = 9$

   $3x + 2y = 4$

4. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ ಮತ್ತು ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದಿಂದ ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು (ಇದ್ದರೆ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

i) ಒಂದು ವಸತಿನಿಲಯದಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟು ಶುಲ್ಕವು ಎರಡು ಭಾಗಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಮೊದಲ ಬಾಗವು ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ. ಎರಡನೇ ಭಾಗವು ಒಂದು ತಿಂಗಳಲ್ಲಿ ಅವರು ಭೋಜನಶಾಲೆಯಿಂದ ಆಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದ ದಿನಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾದ ಶುಲ್ಕ. A ಎಂಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ 20 ದಿನ ಆಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ, ಅವಳು ₹ 1000 ವನ್ನು ವಸತಿ ನಿಲಯಕ್ಕೆ ಶುಲ್ಕವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಯಿತು. B ಎಂಬ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿ 26 ದಿನ ಆಹಾರವನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡು ₹ 1180 ನ್ನು ವಸತಿ ನಿಲಯಕ್ಕೆ ಶುಲ್ಕವಾಗಿ ಪಾವತಿಸಬೇಕಾಯಿತು. ನಿಗದಿತ ಶುಲ್ಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ದಿನದ ಆಹಾರದ ಶುಲ್ಕವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) ಒಂದು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶದಿಂದ 1ನ್ನು ಕಳೆದಾಗ ಅದು $\frac{1}{3}$ ಆಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಛೇದಕ್ಕೆ 8ನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಅದು $\frac{1}{4}$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಆ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

iii) ಯಶ್ ಎಂಬಾತನು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿಯುತ್ತರಕ್ಕೂ 3 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡು ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೂ ಒಂದು ಅಂಕವನ್ನು ಕಳೆದುಕೊಂಡು, 40 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದನು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸರಿ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 4 ಅಂಕಗಳನ್ನು ನೀಡಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಕ್ಕೆ 2 ಅಂಕಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ, ಯಶ್‌ಗೆ 50 ಅಂಕಗಳು ಸಿಗುತ್ತಿತ್ತು. ಹಾಗಾದರೆ, ಪರೀಕ್ಷೆಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿದ್ದುವು?

iv) ಹೆದ್ದಾರಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಎಂಬ ಎರಡು ಸ್ಥಳಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ 100km. ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾರು A ಯಿಂದಲೂ ಇನ್ನೊಂದು ಕಾರು B ಯಿಂದಲೂ ಹೊರಡುತ್ತವೆ. ಕಾರುಗಳು ಒಂದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ, ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಿದರೆ ಅವುಗಳು 5 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. A ಕಾರು B ಯ ಕಡೆಗೆ, B ಕಾರು A ಯ ಕಡೆಗೆ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳು ಸಂಧಿಸಲು ಒಂದು ಗಂಟೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಕಾರುಗಳ ಜವಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

v) ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದವನ್ನು 5 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಿ, ಅಗಲವನ್ನು 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 9 ಚದರ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಉದ್ದವನ್ನು 3 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಮತ್ತು ಅಗಲವನ್ನು 2 ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 67 ಚದರ ಮಾನಗಳಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತದೆ. ಆಯತದ ಉದ್ದ, ಅಗಲಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3.5 ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಬಹುದಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳು:

ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, ರೇಖಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಆದರೆ ಸೂಕ್ತವಾದ ಆದೇಶಿಸುವಿಕೆಯಿಂದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ರೂಪಕ್ಕೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಬಹುದಾದ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ಪರಿಹಾರದ ಬಗ್ಗೆ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವೀಗ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ವಿವರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 17: ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಾವು ಈ ರೀತಿಯಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ.

$$2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\left(\frac{1}{y}\right) = 13 \qquad (1)$$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) - 4\left(\frac{1}{y}\right) = -2 \qquad (2)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳು $ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿಲ್ಲ. ಹಾಗಿದ್ದರೂ $\frac{1}{x} = p$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} = q$ ಎಂದು ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯಾಗಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದೆವು. ಈಗ ನೀವು ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಸಿಗುವುದು $p = 2,\ q = 3$.

$p = \frac{1}{x}$ ಮತ್ತು $q = \frac{1}{y}$ ಎಂದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿದೆ.

p ಮತ್ತು q ಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$\frac{1}{x} = 2$ ಅಂದರೆ, $x = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y} = 3$ ಅಂದರೆ $y = \frac{1}{3}$

ತಾಳೆ: ದತ್ತ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $x = \frac{1}{2}$ ಮತ್ತು $y = \frac{1}{3}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳಿಗೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುವುದು ಕಂಡುಬರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 18: ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸಿ, ಬಿಡಿಸಿ.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ಪರಿಹಾರ: $\frac{1}{x-1} = p$ ಮತ್ತು $\frac{1}{y-2} = q$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸೋಣ.

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \qquad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \qquad (2)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು:

$$5p + q = 2 \quad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \text{ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು.} \quad (4)$$

(3) ಮತ್ತು (4)ನೇ ಸಮೀಕರಣಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ. ನೀವು ಯಾವುದೇ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಬಹುದು. ಆಗ ನಮಗೆ ಸಿಗುವುದು $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$

ನಾವು p ಗೆ $\frac{1}{x-1}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

ಅಂದರೆ, $x - 1 = 3$, ಅಂದರೆ, $x = 4$

ಅದೇ ರೀತಿ, q ಗೆ $\frac{1}{y-2}$ ಎಂದು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

ಅಂದರೆ, $3 = y - 2$, ಅಂದರೆ, $y = 5$

ಹೀಗೆ, ದತ್ತ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಪರಿಹಾರ $x = 4$, $y = 5$.

ತಾಳೆ: $x = 4$ ಮತ್ತು $y = 5$ ಎಂದು (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿ, ಬೆಲೆಗಳು ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 19: ಒಂದು ದೋಣಿಯು 10 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 44 km ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 30 km ಕ್ರಮಿಸುತ್ತದೆ. 13 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ಅದು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 55 km ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 40 km ಕ್ರಮಿಸಬಲ್ಲುದು. ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ಜವ ಮತ್ತು ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವಗಳನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವ x km/h ಮತ್ತು ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ಜವ y km/h ಎಂದಿರಲಿ. ಆಗ ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವ = $(x + y)$ km/h

ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವ = $(x - y)$ km/h

ಅಲ್ಲದೆ, $\text{ಕಾಲ} = \frac{\text{ದೂರ}}{\text{ಜವ}}$

ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯು ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ 30 km ಕ್ರಮಿಸಿದಾಗ, ಅದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಯವು t_1 ಗಂಟೆಗಳು ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$t_1 = \frac{30}{x - y}$$

ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 44 km ಕ್ರಮಿಸಲು ಅದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಕಾಲ t_2 ಗಂಟೆಗಳು ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ $t_2 = \frac{44}{x + y}$. ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಒಟ್ಟು ಕಾಲ $t_1 + t_2$ ಅಂದರೆ 10 ಗಂಟೆಗಳು. ಆದ್ದರಿಂದ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ,

$$\frac{30}{x - y} + \frac{44}{x + y} = 10 \qquad (1)$$

ಎರಡನೇ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯು 3 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 40 km ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು 55 km ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಕ್ರಮಿಸುವುದು. ಆಗ ದೊರೆಯುವ ಸಮೀಕರಣವು,

$$\frac{40}{x - y} + \frac{55}{x + y} = 13 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x - y} = u \text{ ಮತ್ತು } \frac{1}{x + y} = v \text{ ಎಂದು} \qquad (3)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಮತ್ತು (2) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ ಸಿಗುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ ಎಂದರೆ,

$$30u + 44v = 10, \text{ ಅಥವಾ } 30u + 44v - 10 = 0 \qquad (4)$$

$$40u + 55v = 13, \text{ ಅಥವಾ } 40u + 55v - 13 = 0 \qquad (5)$$

ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{u}{44(-13) - 55(-10)} = \frac{v}{40(-10) - 30(-13)} = \frac{1}{30(55) - 44(40)}$$

ಅಂದರೆ, $\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$

ಅಂದರೆ, $u = \frac{1}{5}, \ v = \frac{1}{11}$

ನಾವು u ಮತ್ತು v ಗಳ ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಸಮೀಕರಣ (3) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{1}{x - y} = \frac{1}{5} \text{ ಮತ್ತು } \frac{1}{x + y} = \frac{1}{11}$$

ಅಂದರೆ, $x - y = 5$, ಮತ್ತು $x + y = 11$ (6)

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ

$$2x = 16$$

ಅಂದರೆ, $x = 8$

(6) ರಲ್ಲಿರುವ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕಳೆದಾಗ

$$2y = 6$$

ಅಂದರೆ, $y = 3$

ಹೀಗೆ ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ದೋಣಿಯ ಜವವು 8 km/h ಮತ್ತು ಹರಿಯುವ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಜವವು 3 km/h

ತಾಳೆ: ಪರಿಹಾರವು ಸಮಸ್ಯೆಯ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆನೋಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.6

1. ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನಾಗಿ ಸಂಕ್ಷೇಪಿಸುವ ಮೂಲಕ ಬಿಡಿಸಿ.

   (i) $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = 2$, $\dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{2y} = \dfrac{13}{6}$

   (ii) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{3}{\sqrt{y}} = 2$, $\dfrac{4}{\sqrt{x}} - \dfrac{9}{\sqrt{y}} = -1$

   (iii) $\dfrac{4}{x} + 3y = 14$, $\dfrac{3}{x} - 4y = 23$

   (iv) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{1}{y-2} = 2$, $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{y-2} = 1$

   (v) $\dfrac{7x - 2y}{xy} = 5$, $\dfrac{8x + 7y}{xy} = 15$

   (vi) $6x + 3y = 6xy$, $2x + 4y = 5xy$

   (vii) $\dfrac{10}{x+y} + \dfrac{2}{x-y} = 4$, $\dfrac{15}{x+y} - \dfrac{5}{x-y} = -2$

   (viii) $\dfrac{1}{3x+y} + \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{2(3x+y)} - \dfrac{1}{2(3x-y)} = \dfrac{-1}{8}$

2. ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ, ಅವುಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) ರೀತು ಪ್ರವಾಹದ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 2 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 20 km ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹದ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ 2 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ 4 km ಸಂಚರಿಸುವಳು. ನಿಶ್ಚಲ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಅವಳು ಸಂಚರಿಸುವ ಜವ ಮತ್ತು ಹರಿಯುವ ನೀರಿನ ಜವಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ii) ಇಬ್ಬರು ಮಹಿಳೆಯರು, 5 ಪುರುಷರು ಒಟ್ಟಿಗೆ ಒಂದು ಕಸೂತಿ ಕಾರ್ಯವನ್ನು 4 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಮುಗಿಸಬಲ್ಲರು. ಮೂರು ಮಹಿಳೆಯರು ಮತ್ತು 6 ಪುರುಷರು ಇದನ್ನು 3 ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಬಲ್ಲರು. ಒಬ್ಬ ಮಹಿಳೆ ಮಾತ್ರ ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ? ಹಾಗೂ ಒಬ್ಬ ಪುರುಷ ಮಾತ್ರ ಈ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಮಾಡಿದರೆ ಎಷ್ಟು ದಿನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ?

(iii) ರೂಹಿಯು 300 km ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ತನ್ನ ಮನೆಯ ಕಡೆಗಿನ ಪ್ರಯಾಣದಲ್ಲಿ ಸ್ವಲ್ಪ ದೂರವನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲಿಯೂ, ಉಳಿದ ದೂರವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲಿಯೂ ಕ್ರಮಿಸುವಳು. 60 km ನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲೂ, ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲೂ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಅವಳು 4 ಗಂಟೆಗಳಲ್ಲಿ ತಲುಪುವಳು. 100 km ನ್ನು ರೈಲಿನಲ್ಲೂ, ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಬಸ್ಸಿನಲ್ಲೂ ಪ್ರಯಾಣಿಸಿದರೆ ಅವಳಿಗೆ ತಲುಪಲು 10 ನಿಮಿಷ ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಬಸ್ಸು ಮತ್ತು ರೈಲುಗಳ ಜವಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.7 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. ಅನಿ ಮತ್ತು ಬಿಜು ಎಂಬ ಇಬ್ಬರು ಗೆಳೆಯರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 3 ವರ್ಷಗಳು. ಅನಿಯ ತಂದೆ ಧರಂರವರ ವಯಸ್ಸು ಅನಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡರಷ್ಟು ಹಾಗೂ ಬಿಜುವಿನ ವಯಸ್ಸು ಅವನ ತಂಗಿ ಕ್ಯಾಥಿಯ ವಯಸ್ಸಿನ ಎರಡರಷ್ಟು. ಧರಂ ಮತ್ತು ಕ್ಯಾಥಿಯವರ ವಯಸ್ಸುಗಳ ನಡುವಿನ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 30 ವರ್ಷಗಳು. ಅನಿ ಮತ್ತು ಬಿಜುವಿನ ವಯಸ್ಸುಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಒಬ್ಬನು ಹೇಳುತ್ತಾನೆ, "ಗೆಳೆಯಾ, ನನಗೊಂದು ನೂರು ಕೊಡು. ಆಗ ನಾನು ನಿನಗಿಂತ ಎರಡುಪಟ್ಟು ಶ್ರೀಮಂತನಾಗುತ್ತೇನೆ". ಇನ್ನೊಬ್ಬ ಉತ್ತರಿಸುತ್ತಾನೆ "ನೀನು ನನಗೆ 10 ಕೊಟ್ಟರೆ, ನಾನು ನಿನಗಿಂತ ಆರುಪಟ್ಟು ಶ್ರೀಮಂತನಾಗುತ್ತೇನೆ". ಅವರಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರ ಬಳಿ ಇರುವ ಬಂಡವಾಳವನ್ನು ಹೇಳಿ. [ಭಾಸ್ಕರ II ಇವರ ಬೀಜಗಣಿತ ಅಧ್ಯಾಯದಿಂದ]

   [**ಸೂಚನೆ**: $x + 100 = 2\ (y - 100)$, $y + 10 = 6\ (x - 10)$]

3. ಒಂದು ರೈಲು ಸ್ಥಿರ ಜವದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಿತು. ಒಂದು ವೇಳೆ ಅದು ಜವವನ್ನು 10 km/h ರಷ್ಟು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದ್ದರೆ ಆ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ಅದು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 2 ಗಂಟೆ ಕಡಿಮೆ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು. ಒಂದು ವೇಳೆ 10 km/h ರಷ್ಟು ಜವವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದ್ದರೆ ಅದೇ ದೂರವನ್ನು ಕ್ರಮಿಸಲು ನಿಗದಿತ ಸಮಯಕ್ಕಿಂತ 3 ಗಂಟೆ ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ರೈಲು ಕ್ರಮಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಹಲವು ಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ನಿಲ್ಲಿಸಲಾಯಿತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಿಗೆ ಇದ್ದರೆ ಒಂದು ಸಾಲು ಕಡಿಮೆಯಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಡಿಮೆ ಇದ್ದರೆ 2 ಸಾಲುಗಳು ಹೆಚ್ಚು ಬೇಕಾಗುತ್ತಿತ್ತು. ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ΔABC ಯಲ್ಲಿ, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$. ಮೂರು ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. $5x - y = 5$ ಮತ್ತು $3x - y = 3$ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ. ಈ ರೇಖೆಗಳು ಮತ್ತು y ಅಕ್ಷದಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

7. ಕೆಳಗಿನ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಿರಿ.

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

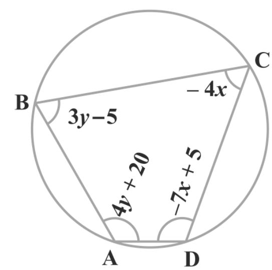
(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a-b)x + (a+b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

8. ABCD ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ (ಚಿತ್ರ 3.7ನ್ನು ನೋಡಿರಿ) ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕೋನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



3.6 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ.

1. ಎರಡು ಸಮಾನ ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯ ಅತ್ಯಂತ ಸಾಮಾನ್ಯ ರೂಪವು.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

ಇಲ್ಲಿ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, ಹೇಗೆಂದರೆ, $a_1^2 + b_1^2, \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2, \neq 0$

*ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದಲ್ಲ.

2. ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು,

   (i) ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನದಿಂದ

   (ii) ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನದಿಂದ, ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು ಮತ್ತು ಬಿಡಿಸಬಹುದು.

3. ನಕ್ಷಾ ವಿಧಾನ:

   ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಎರಡು ಸರಳರೇಖೆಗಳ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.

   (i) ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಿದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವು ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು **ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ**.

   (ii) ಸರಳರೇಖೆಗಳು ಐಕ್ಯಗೊಂಡರೆ ಅಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುತ್ತವೆ – ಸರಳರೇಖೆಯ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಿಂದುವೂ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವಾಗುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು **ಅವಲಂಬಿತವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ)**.

   (iii) ರೇಖೆಗಳು ಸಮಾಂತರವಾದರೆ, ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು **ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ**.

4. ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಗಳು: ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ಕೆಳಗಿನ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

   (i) ಆದೇಶ ವಿಧಾನ

   (ii) ವರ್ಜಿಸುವ ವಿಧಾನ

   (iii) ಓರೆ ಗುಣಾಕಾರ ವಿಧಾನ

5. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ಮತ್ತು $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ಎಂಬ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯೊಂದನ್ನು ನೀಡಿದರೆ, ಕೆಳಗಿನ ಪರಿಸ್ಥಿತಿಗಳು ಉಂಟಾಗಬಹುದು.

   (i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

   (ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಗಳಲ್ಲಿ, ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯು ಅವಲಂಬಿತ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

6. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ರೇಖಾತ್ಮಕವಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ಕೂಡಾ ಆ ಬಳಿಕ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದಾದ ಅನೇಕ ಸಂದರ್ಭಗಳಿವೆ. ಆಗ ಅವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಯಾಗುವಂತೆ ಸಂಕ್ಷೇಪಗೊಳಿಸುತ್ತೇವೆ.

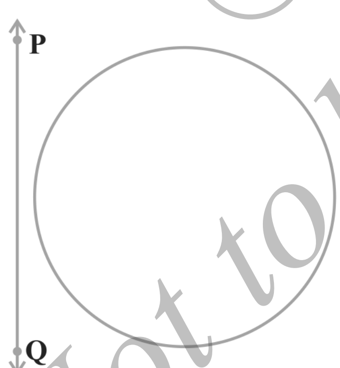
❀ ❀ ❀

ವೃತ್ತಗಳು 4

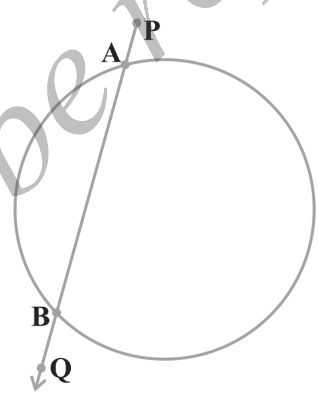
4.1 ಪೀಠಿಕೆ

ವೃತ್ತ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರ ಬಿಂದು (ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ)ವಿನಿಂದ, ಸ್ಥಿರ ಅಂತರದಲ್ಲಿ (ತ್ರಿಜ್ಯ) ರುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಮೂಹ ಎಂಬುದನ್ನು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪದಗಳಾದ ಜ್ಯಾ, ವೃತ್ತಖಂಡ, ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ, ಕಂಸ ಇತ್ಯಾದಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಇದೀಗ ಒಂದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ನೀಡಿರುವಾಗ ಉದ್ಭವಿಸುವ (ಉಂಟಾಗುವ) ವಿವಿಧ ಸನ್ನಿವೇಶ (ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು) ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

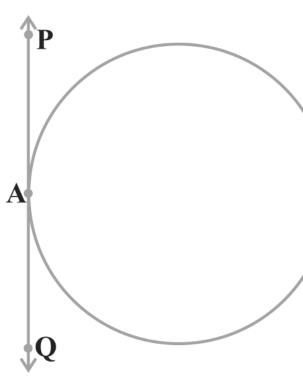
ಈಗ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ರೇಖೆ PQ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಚಿತ್ರ 4.1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವಂತೆ ಮೂರು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು.



4.1 (i)



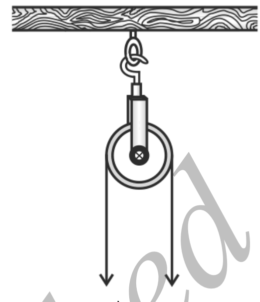
4.1 (ii)



4.1 (iii)

ಚಿತ್ರ 4.1 (i) ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿಲ್ಲ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ PQ ಅನ್ನು **ಛೇದಕವಲ್ಲದ ರೇಖೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 4.1 (ii) ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ರೇಖೆ PQ ಅನ್ನು **ವೃತ್ತ ಛೇದಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ 4.1 (iii) ರಲ್ಲಿ ರೇಖೆ PQ ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ಒಂದೇ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಅನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ರೇಖೆ PQ ಅನ್ನು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ **ಸ್ಪರ್ಶಕ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಬಾವಿಯಿಂದ ನೀರನ್ನು ಹೊರತೆಗೆಯಲು, ಬಾವಿಯ ಮೇಲೆ ಅಳವಡಿಸಿರುವ ರಾಟೆಯನ್ನು ನೋಡಿರಬಹುದು. ಚಿತ್ರ 4.2ನ್ನು ನೋಡಿ. ಇಲ್ಲಿ ರಾಟೆಯ ಎರಡು ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹಗ್ಗವನ್ನು ಕಿರಣವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಅದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ರಾಟೆಗೆ ಸ್ಪರ್ಶಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 4.2

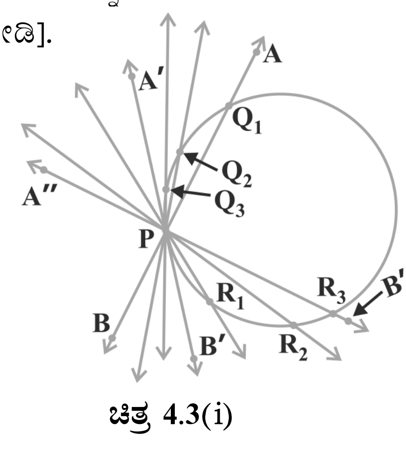
ಮೇಲೆ ನೀಡಿರುವ ವಿಧಗಳನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿದೆಯೇ? ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಇಡಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಗುಣಗಳನ್ನು ಕಲಿಯೋಣ.

4.2 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ

ಹಿಂದಿನ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ, **ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕ*** ಎಂದು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 1: ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು ನೇರ ತಂತಿ AB ಯನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ. ಇದು ಸಮತಲದಲ್ಲಿ P ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ ಭ್ರಮಿಸುವಂತಿರಲಿ. ಈಗ ಇದನ್ನು ಮೇಜಿನ ಮೇಲಿಟ್ಟು P ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ AB ತಂತಿಯನ್ನು ನಯವಾಗಿ ತಿರುಗಿಸಿ ನೇರ ತಂತಿಯ ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಿರಿ. [ಚಿತ್ರ 4.3(i) ನೋಡಿ].

ನೇರ ತಂತಿಯು, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ತಂತಿಯನ್ನು ವಿವಿಧ ಸ್ಥಾನಗಳಲ್ಲಿ ಅಂದರೆ P ಹಾಗೂ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು Q_1 ಅಥವಾ Q_2 ಅಥವಾ Q_3 ಇತ್ಯಾದಿ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಒಂದು ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ತಂತಿಯು ವೃತ್ತವನ್ನು ಒಂದೇ ಒಂದು ಬಿಂದು P ನಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ (AB ಯ A'B' ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗಮನಿಸಿ) ಇದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.3(i)

ಭ್ರಮಿಸುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿದಾಗ, AB ಯ ಇತರೆ ಸ್ಥಾನಗಳು P ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಾಗೂ ಇನ್ನೊಂದು ಬಿಂದು R_1 ಅಥವಾ R_2 ಅಥವಾ R_3 ಇತ್ಯಾದಿಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, **ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಿದೆ** ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

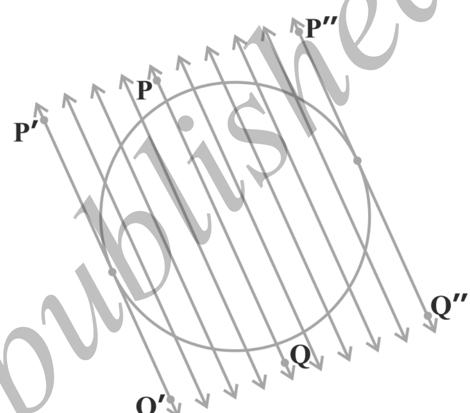
ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ಮಾಡುವಾಗ, AB ಯ ಸ್ಥಾನವು A'B' ಕಡೆಗೆ ಕ್ರಮಿಸುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, AB ರೇಖೆಯ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು ಅಂದರೆ Q_1 ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ಕ್ರಮೇಣ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು Pಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ

* ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಂದರೆ ಆಂಗ್ಲ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ 'Tangent'. ಈ ಪದವು ಲ್ಯಾಟಿನ್ ಭಾಷೆಯ 'tangere' ಎಂಬ ಪದದಿಂದ ಬಂದಿದೆ. ಇದರ ಅರ್ಥ 'ಸ್ಪರ್ಶಿಸು' ಎಂದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಡ್ಯಾನಿಷ್‌ನ ಗಣಿತಜ್ಞ ಥಾಮಸ್ ಫಿನೆಕೆ 1583 ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಥಮವಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಿದರು.

ಮತ್ತೂ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತ ಬರುತ್ತದೆ. ಅಂತಿಮವಾಗಿ A''B'' ನ ಸ್ಥಾನವಾದ A'B' ನಲ್ಲಿ ಬಿಂದು P ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. AB ಯನ್ನು P ಯ ಮೇಲೆ ಬಲಕ್ಕೆ ಭ್ರಮಿಸಿದಾಗ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದು R_3 ಕ್ರಮೇಣ ಬಿಂದು P ಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ ಮತ್ತೂ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತ ಅಂತಿಮವಾಗಿ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಐಕ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಗಮನಿಸಬಹುದೇನೆಂದರೆ,

ಛೇದಕವೊಂದರ ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದ ಎರಡು ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಛೇದಕದ ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕರಣವೇ ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

ಚಟುವಟಿಕೆ 2: ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ಛೇದಕ ರಚಿಸಿ. ಛೇದಕದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳಲ್ಲಿ, ಛೇದಕಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಕೆಲವು ಹಂತಗಳ ನಂತರ ರೇಖೆಗಳಿಂದಾದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಕ್ರಮೇಣವಾಗಿ ಕಡಿಮೆಯಾಗುವುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ. ಅಂದರೆ, ಛೇದನ ರೇಖೆಯ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು ಮತ್ತು ವೃತ್ತವು ಹತ್ತಿರ ಮತ್ತು ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.3 (ii) ನೋಡಿ). ಒಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಕದ ಒಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಮತ್ತೊಂದು ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ಛೇದಕದ ಇನ್ನೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಉದ್ದವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಛೇದಕ P'Q' ಮತ್ತು P''Q'' ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 4.3(ii) ನೋಡಿ). ಇವು ಕೊಟ್ಟಿರುವ ಛೇದಕ PQ ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಇದು ಒಂದು ಛೇದಕಕ್ಕೆ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಸಹಾಯಮಾಡುತ್ತದೆ.

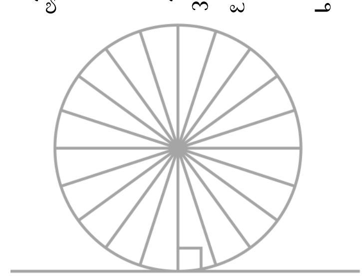


ಚಿತ್ರ 4.3(ii)

ಚಟುವಟಿಕೆ 1 ರಲ್ಲಿ, ನಾವು ಈಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ ಅಂಶವು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಛೇದಕಕ್ಕೆ ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುಗಳು ಐಕ್ಯವಾದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಛೇದಕವೇ ಸ್ಪರ್ಶಕ.

ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕ್ಕಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವನ್ನು **ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 4.1 (iii) ರಲ್ಲಿನ ಬಿಂದು A) ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕವು ವೃತ್ತವನ್ನು ಆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಿಮ್ಮ ಸುತ್ತಲೂ ನೋಡಿರಿ. ನೀವು ಬೈಸಿಕಲ್ ಅಥವಾ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಬಂಡಿಯನ್ನು ನೋಡಿದ್ದೀರಾ? ಅವುಗಳ ಚಕ್ರಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಚಕ್ರದ ಎಲ್ಲಾ ಕಡ್ಡಿಗಳು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯದ ನೇರದಲ್ಲಿದೆ. ಈಗ ಚಕ್ರದ ಚಲನೆಯನ್ನು ನೆಲದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿ. ಅದರ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ನೀವು ಎಲ್ಲಿಯಾದರೂ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಕಂಡಿರಾ? (ಚಿತ್ರ 4.4 ನೋಡಿ). ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಚಕ್ರವು ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ರೇಖೆಯ ನೇರವು, ವೃತ್ತವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಚಕ್ರದ ಸ್ಪರ್ಶಕವೇ ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ


ಚಿತ್ರ 4.4

ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ನೆಲದ ಮೇಲೆ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯವು ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುವಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 4.4 ನೋಡಿ). ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಈ ಗುಣವನ್ನು ನಾವೀಗ ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 4.1: *ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು, ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.*

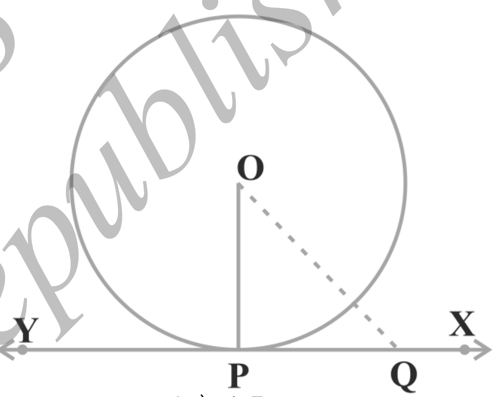
ಸಾಧನೆ: ನಮಗೆ ನೀಡಿದ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ XY ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ. ನಾವು, OP ಯು XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಿದೆ.

P ಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, XY ಮೇಲೆ ಮತ್ತೊಂದು ಬಿಂದು Q ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ ಮತ್ತು OQ ಸೇರಿಸಿ. (ಚಿತ್ರ 4.5 ನೋಡಿ).

Q ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದಲ್ಲಿರಬೇಕು. (ಏಕೆ? Q ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, XY ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಛೇದಕವಾಗಿರುತ್ತದೆಯೇ ಹೊರತು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ). ಆದ್ದರಿಂದ, OQ ಇದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ OP ಗಿಂತ ಉದ್ದವಾಗಿದೆ ಅಂದರೆ,

$$OQ > OP$$

P ಬಿಂದುವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ, XY ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಬಿಂದುಗಳಿಗೂ ಇದು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ O ಬಿಂದುವಿನಿಂದ XY ನ ಮೇಲಿನ ಇತರೆ ಬಿಂದುಗಳಿಗಿರುವ ದೂರಕ್ಕಿಂತ OP ಯು ಕನಿಷ್ಟ ಉದ್ದವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು XY ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 4.5

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಮೇಲಿನ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸಬಹುದು.
2. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ರೇಖೆಯನ್ನು ಕೆಲವು ಸಲ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ವೃತ್ತದ 'ಲಂಬಕ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?
2. ಬಿಟ್ಟ ಸ್ಥಳ ತುಂಬಿರಿ:

   i) ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಕವೊಂದು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ____________

   ii) ವೃತ್ತವನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವ ರೇಖೆಯೇ ____________

iii) ಒಂದು ವೃತ್ತವು ಹೊಂದಿರಬಹುದಾದ ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಗರಿಷ್ಠ ಸಂಖ್ಯೆ ______________

iv) ಒಂದು ವೃತ್ತ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತು ಒಂದು ವೃತ್ತ ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಿಂದುವೇ ______________

3. 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕ PQ. ಇದು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ದಿಂದ ಎಳೆದ ರೇಖೆಯನ್ನು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. OQ = 12 cm ಆದರೆ PQ ಉದ್ದವು

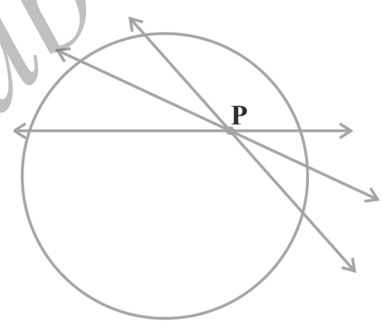
a) 12 cm b) 13 cm c) 8.5 cm d) $\sqrt{119}$ cm

4. ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಕೊಟ್ಟಿರುವ ರೇಖೆಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮತ್ತೊಂದು ರೇಖೆಯು ಛೇದಕವಾಗಿರುವಂತೆ ಎರಡು ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

4.3 ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ:

ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕಲ್ಪಸಿಕೊಳ್ಳಲು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಒಂದು ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

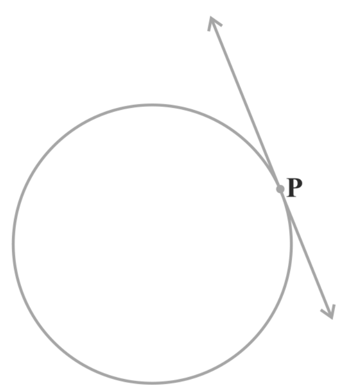
ಚಟುವಟಿಕೆ 3: ಒಂದು ಹಾಳೆಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಅದರ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ 'P' ಬಿಂದುವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ನೀವು ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಸ್ಪರ್ಶಕ ರಚಿಸಬಹುದೇ? ಈ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಎಳೆದ ಎಲ್ಲಾ ರೇಖೆಗಳ ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಯಾವುದೇ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಚಿತ್ರ 4.6(i) ನೋಡಿ).



(i)

ಈಗ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿರುವಂತೆ ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ರೀತಿಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕವಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವಿಗಾಗಲೇ ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ.

ಅಂತಿಮವಾಗಿ, ಬಿಂದುವನ್ನು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗೆ ಗುರುತಿಸಿ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಿ? ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದೆಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವಿರಿ.

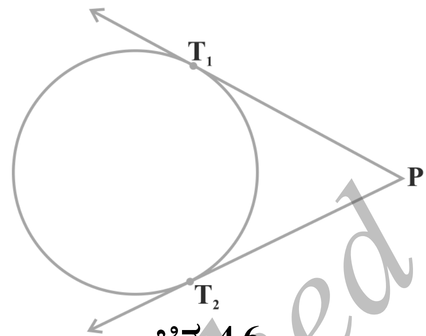


(ii)

ಮೇಲಿನ ಎಲ್ಲಾ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಸಾರಾಂಶಿಸೋಣ.

ಪ್ರಕರಣ 1: ವೃತ್ತದ ಒಳಗಿನ ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ.

ಪ್ರಕರಣ 2: ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮಾತ್ರ ಎಳೆಯಬಹುದು.



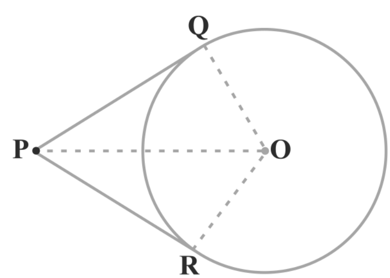
ಚಿತ್ರ 4.6
(iii)

ಪ್ರಕರಣ 3: ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು.

ಚಿತ್ರ 4.6 (iii), PT_1 ಮತ್ತು PT_2 ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ T_1 ಮತ್ತು T_2 ಆಗಿವೆ.

ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ **ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

ಚಿತ್ರ 4.6 (iii) ದಲ್ಲಿ, PT_1 ಮತ್ತು PT_2 ಗಳು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. PT_1 ಮತ್ತು PT_2 ಗಳೆರಡೂ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಆ ಗುಣವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? PT_1 ಮತ್ತು PT_2 ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳತೆ ಮಾಡಿರಿ. ಅವುಗಳು ಸಮವಾಗಿವೆಯೇ? ನೈಜವಾಗಿ ಅವುಗಳು ಯಾವಾಗಲೂ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ನಾವು ಈ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗೆ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ನೀಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 4.7

ಪ್ರಮೇಯ 4.2: *ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ಉದ್ದವು ಸಮನಾಗಿರುತ್ತದೆ.*

ಸಾಧನೆ: 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಮತ್ತು 'P' ಯು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು. PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು P ನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ನಾವು PQ = PR ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು OP, OQ ಮತ್ತು OR ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿರಿ. ಆಗ, $\angle OQP$ ಮತ್ತು $\angle ORP$ ಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳು, ಏಕೆಂದರೆ ಈ ಕೋನಗಳು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 4.1 ರಿಂದ ಅವುಗಳು ಲಂಬಕೋನಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ OQP ಮತ್ತು ORP ಗಳಲ್ಲಿ,

	OQ = OR	(ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು)
	OP = OP	(ಸಾಮಾನ್ಯ ಬಾಹು)
ಆದ್ದರಿಂದ,	$\Delta OQP \cong \Delta ORP$	(ಲಂ.ವಿ.ಬಾ)
ಇದರಿಂದ,	PQ = PR	(ಸ.ತ್ರಿ.ಅ.ಬಾ.)

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪೈಥಾಗೋರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

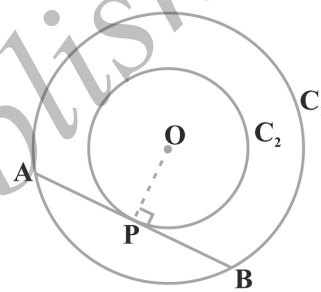
$$PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2 \; (\therefore OQ = OR)$$

ಇದರಿಂದ, $PQ = PR$

2. $\angle OPQ = \angle OPR$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು $\angle QPR$ ನ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕದ ನಡುವಿನ ಕೋನದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವಿದೆ.

ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ, ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾವು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸಿದರೆ, ಜ್ಯಾವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಅರ್ಧಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4.8

ಪರಿಹಾರ: ನಮಗೆ 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ C_1 ಮತ್ತು C_2 ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ ಹಾಗೂ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತ C_1 ದ ಜ್ಯಾ AB ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತ C_2 ವನ್ನು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುತ್ತದೆ. ನಾವು $AP = BP$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

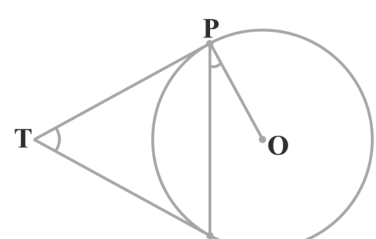
ಈಗ ನಾವು OP ಯನ್ನು ಸೇರಿಸೋಣ. ಆಗ AB ಯು C_2 ಗೆ P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು OP ಯು ಅದರ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಆದ್ದರಿಂದ ಪ್ರಮೇಯ 4.1 ರಿಂದ,

$$OP \perp AB$$

ಈಗ AB ಯು C_1 ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು $OP \perp AB$ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಜ್ಯಾಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ಜ್ಯಾ ವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OP ಯು ಜ್ಯಾ AB ಯನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ,

$$AP = BP$$

ಉದಾಹರಣೆ 2: 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಬಾಹ್ಯಬಿಂದು T ಯಿಂದ TP ಮತ್ತು TQ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.9

ಪರಿಹಾರ: 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ವೃತ್ತ, ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದು T, ಮತ್ತು TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು P ಮತ್ತು Q ಗಳಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ನೀಡಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.9 ನೋಡಿ). ನಾವು $\angle PTQ = 2\angle OPQ$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

$\angle PTQ = \theta$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ 4.2 ರಿಂದ, TP = TQ ಆದ್ದರಿಂದ TPQ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

$$\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\theta$$

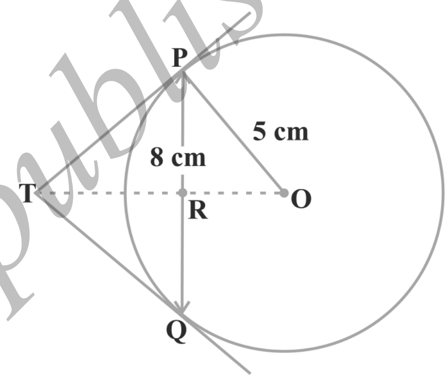
ಹಾಗೆಯೇ ಪ್ರಮೇಯ 4.1 ರಿಂದ, $\angle OPT = 90^\circ$

ಆದ್ದರಿಂದ $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\angle PTQ$$

ಇದರಿಂದ, $\angle PTQ = 2\ \angle OPQ$

ಉದಾಹರಣೆ 3: 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಜ್ಯಾ PQ ಉದ್ದವು 8 cm ಆಗಿದೆ. P ಮತ್ತು Q ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿನ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು T ಬಿಂದುವನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 4.10 ನೋಡಿ). TP ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.10

ಪರಿಹಾರ: OT ಸೇರಿಸಿ. ಅದು PQ ರೇಖೆಯನ್ನು ಬಿಂದು R ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆಗ Δ TPQ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು TO ರೇಖೆಯು $\angle PTQ$ ದ ಕೋನಾರ್ಧಕ ರೇಖೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ OT $\perp$ PQ ಮತ್ತು ಆದ್ದರಿಂದ OT ರೇಖೆಯು PQ ಅನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ, PR = RQ = 4 cm.

ಹಾಗೆಯೇ, $OR = \sqrt{OP^2 - PR^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$ cm = 3 cm

ಈಗ, $\angle TPR + \angle RPO = 90^\circ = \angle TPR + \angle PTR$ (ಏಕೆ?)

ಆದ್ದರಿಂದ, $\angle RPO = \angle PTR$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ TRP ಯು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ PRO ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿದೆ. (ಕೋನ – ಕೋನ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣ).

ಇದರಿಂದ, $\frac{TP}{PO} = \frac{RP}{RO}$, ಅಂದರೆ, $\frac{TP}{5} = \frac{4}{3}$ ಅಥವಾ $TP = \frac{20}{3}$ cm.

ಗಮನಿಸಿ: TP ಯನ್ನು ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯದ ಮೂಲಕ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

TP = x ಮತ್ತು TR = y ಎಂದಿರಲಿ.

ಆಗ, $x^2 = y^2 + 16$ [Δ PRT ದಿಂದ] (1)

$$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2 \quad [\Delta \ \text{OPT ದಿಂದ}] \qquad (2)$$

ಸಮೀಕರಣ (1) ಅನ್ನು (2) ರಿಂದ ಕಳೆದಾಗ,

$$25 = 6y - 7 \text{ ಅಥವಾ } y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 = \left(\frac{16}{3}\right)^2 + 16 = \frac{16}{9}(16 + 9) = \frac{16 \times 25}{9}$ [(1) ರಿಂದ]

ಅಥವಾ $x = \frac{20}{3}$ cm

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

ಪ್ರಶ್ನೆ 1 ರಿಂದ 3 ರವರೆಗೆ ಸರಿಯಾದ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಆರಿಸಿ ಮತ್ತು ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿರಿ.

1. ಒಂದು ಬಿಂದು Q ದಿಂದ, ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 24 cm ಮತ್ತು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹಾಗೂ Q ಬಿಂದು ನಡುವಿನ ದೂರ 25 cm ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

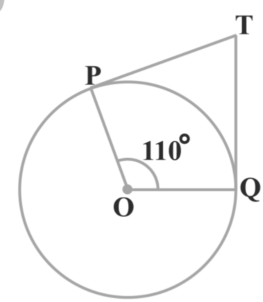
   A) 7 cm B) 12 cm

   C) 15 cm D) 24.5 cm

2. ಚಿತ್ರ 4.11 ರಲ್ಲಿ, $\angle POQ = 110^\circ$ ಆಗಿರುವಂತೆ, O ಕೇಂದ್ರವುಳ್ಳ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ TP ಮತ್ತು TQ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle PTQ$ ದ ಅಳತೆಯು

   A) 60° B) 70°

   C) 80° D) 90°



ಚಿತ್ರ 4.11

3. ‘O’ ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ P ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾದ PA ಮತ್ತು PB ಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 80° ಆದರೆ $\angle POA$ ದ ಅಳತೆಯು

   A) 50° B) 60°

   C) 70° D) 80°

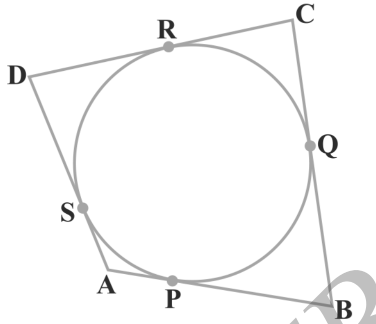
4. ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸದ ಅಂತ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

5. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸ್ಪರ್ಶಕಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಲಂಬವು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

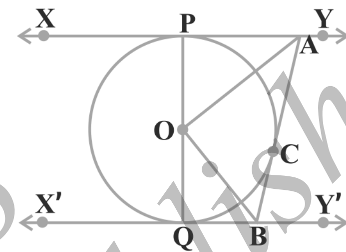
6. ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 5 cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವ A ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಉದ್ದವು 4 cm ಇದೆ. ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರಿಯ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು 5 cm ಮತ್ತು 3 cm ಆಗಿವೆ. ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ದೊಡ್ಡ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾದ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ABCD ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 4.12 ನೋಡಿ). AB + CD = AD + BC ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4.12



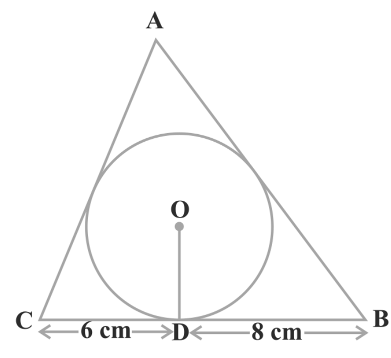
ಚಿತ್ರ 4.13

9. ಚಿತ್ರ 4.13 ರಲ್ಲಿ, 'O' ವೃತ್ತ ಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ XY ಮತ್ತು X'Y' ಸಮಾಂತರ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು C ನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ಮತ್ತೊಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ AB ಯು XY ಅನ್ನು A ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಮತ್ತು X'Y' ಅನ್ನು B ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ $\angle AOB = 90^{\circ}$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

10. ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ ಹಾಗೂ ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸುವಂತೆ ಎಳೆದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

11. ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

12. ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು D ಯು BC ಬಾಹುವನ್ನು BD ಮತ್ತು DC ಯ ಉದ್ದ ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 cm ಮತ್ತು 6 cm ಇರುವಂತೆ 4 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವು ΔABCದಲ್ಲಿ ಆವೃತ್ತಗೊಳಿಸಲು ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಲಾಗಿದೆ. [ಚಿತ್ರ 4.14 ನೋಡಿ]. AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 4.14

13. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದಲ್ಲಿ ವೃತ್ತವು ಅಂತಸ್ಥವಾದಾಗ, ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕೋನಗಳು ಪರಿಪೂರಕಗಳಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

4.4 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

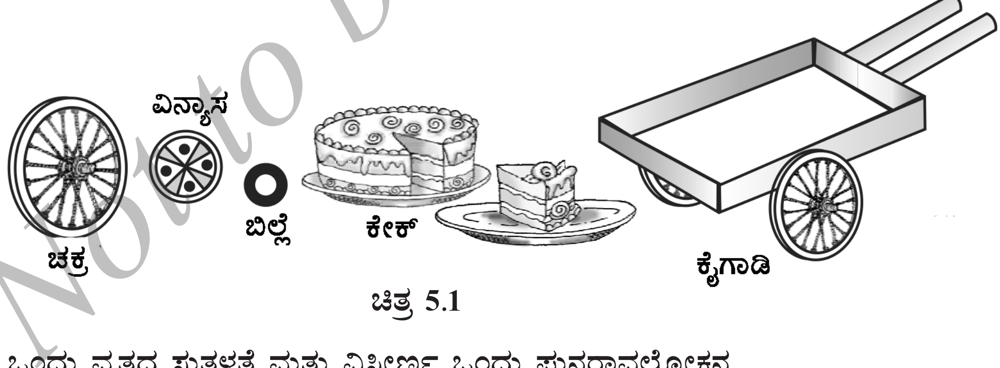
1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕದ ಅರ್ಥ.
2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸ್ಪರ್ಶಕವು ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ.
3. ಒಂದು ಬಾಹ್ಯ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎಳೆದ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳು ಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

❀ ❀ ❀

ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು 5

5.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳಾದ ಆಯತ, ಚೌಕ, ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ, ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಕೆಲವು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಬಹಳಷ್ಟು ವಸ್ತುಗಳು ವೃತ್ತಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಸೈಕಲ್‌ನ ಚಕ್ರ, ಕೈಗಾಡಿಯ ಚಕ್ರ, ಈಟಿ ಎಸೆತದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹಲಗೆ, ದುಂಡನೆಯ ಕೇಕ್, ಹಪ್ಪಳ, ಒಳಚರಂಡಿ ಮುಚ್ಚಳ, ವಿವಿಧ ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಬಳೆಗಳು, ಪದಕಗಳು, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪಥಗಳು, ಬಿಲ್ಲೆಗಳು, ಹೂ ಹಾಸುಗಳು ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಇಂತಹ ವಸ್ತುಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 5.1 ನೋಡಿ). ಆದ್ದರಿಂದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಆಕೃತಿಗಳ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಪ್ರಯೋಗಿಕವಾಗಿ ಮುಖ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ (ಪರಿಧಿ) ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪುನರಾವಲೋಕನ ಮಾಡಿ ಚರ್ಚಿಸೋಣ ಮತ್ತು ಈ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ವೃತ್ತದ ವಿಶೇಷ ಭಾಗಗಳಾದ ವಲಯ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ನಾವು ಹಾಗೆಯೇ ವೃತ್ತ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಭಾಗಗನ್ನೊಳಗೊಂಡ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.



ಚಿತ್ರ 5.1

5.2 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಒಂದು ಪುನರಾವಲೋಕನ.

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಲೂ ಒಂದು ಸುತ್ತು ಹಾಕಲು ಚಲಿಸಿದ ದೂರವನ್ನು ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಅಥವಾ ಪರಿಧಿ ಎಂದು ಕರೆಯುವುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯು ಅದರ ವ್ಯಾಸದೊಂದಿಗೆ ಸ್ಥಿರವಾದ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಗ್ರೀಕ್ ಅಕ್ಷರ π ನಿಂದ (ಪೈ ಎಂದು ಓದಿ) ಸೂಚಿಸುತ್ತಾರೆ ಅಥವಾ

$$\frac{\text{ಪರಿಧಿ}}{\text{ವ್ಯಾಸ}} = \pi$$

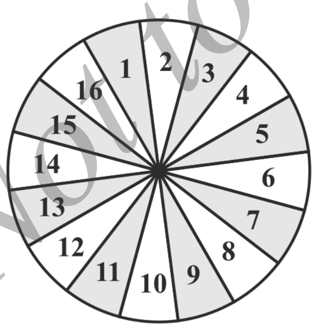
$$\text{ಪರಿಧಿ} = \pi \times \text{ವ್ಯಾಸ}$$

$$= \pi \times 2r \text{ (‘r’ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ)}$$

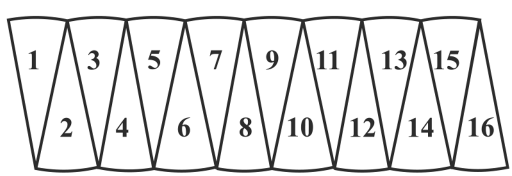
$$= 2\pi r$$

ಭಾರತೀಯ ಸುಪ್ರಸಿದ್ಧ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಆರ್ಯಭಟ (ಕ್ರಿ.ಶ 476 – 550) π ಗೆ ಅಂದಾಜು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿದ್ದಾರೆ. $\pi = \frac{62832}{20000}$, ಇದು 3.1416 ಗೆ ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಸಮನಾಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಿದ್ದಾರೆ. ಭಾರತದ ಮತ್ತೊಬ್ಬ ಮಹಾನ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಅಸಾಧಾರಣ ಶ್ರೀನಿವಾಸ ರಾಮಾನುಜನ್ (1887 – 1920) ರವರ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಗಣಿತಜ್ಞರು π ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಮಿಲಿಯನ್‌ಗಳ ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳವರೆಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವಾಯಿತು ಎಂಬುವುದು ಸ್ವಾರಸ್ಯಕರ ಸಂಗತಿಯಾಗಿದೆ. ನೀವು ಒಂಬತ್ತನೆಯ ತರಗತಿಯ ಅಧ್ಯಾಯ 1 ರಲ್ಲಿ π ಯು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದ ಮತ್ತು ಆವರ್ತವಾಗದ (ಪುನರಾವತನೆಯಾಗದ) ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರುವಿರಿ. ಆದಾಗ್ಯೂ ಸಹ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಉದ್ದೇಶಗಳಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ನಾವು π ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ $\frac{22}{7}$ ಅಥವಾ 3.14 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

ನೀವು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು πr^2 ಎಂದು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ ‘r’ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ. ಏಳನೆ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಹಲವು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ಕತ್ತರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 5.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಮರು ಜೋಡಣೆ ಮಾಡಿ ತಾಳೆನೋಡಿರುವುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.



(i)



(ii)

ಚಿತ್ರ 5.2

ಚಿತ್ರ 5.2 (ii) ರಲ್ಲಿನ ಆಕೃತಿಯ ಆಕಾರವು ಸರಿಸುಮಾರಾಗಿ ಒಂದು ಆಯತಾಕಾರದಲ್ಲಿದ್ದು

ಇದರ ಉದ್ದವು $\frac{1}{2} \times 2\pi r$ ಮತ್ತು ಅಗಲವು 'r' ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಇದು ಸೂಚಿಸುವುದೇನೆಂದರೆ, ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r^2 = \pi r^2$ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳ ಮೂಲಕ ನೆನಪು ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಒಂದು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ಸುತ್ತಲೂ ಬೇಲಿ ಹಾಕಲು ಪ್ರತಿ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 24 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ ₹ 5280. ಹೊಲವನ್ನು ಉಳಲು ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 0.50 ರಂತೆ ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ).

ಪರಿಹಾರ: ಬೇಲಿಯ ಉದ್ದ (ಮೀಟರ್‌ದಲ್ಲಿ) = $\frac{\text{ಒಟ್ಟು ವೆಚ್ಚ}}{\text{ದರ}} = \frac{5280}{24} = 220$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೊಲದ ಪರಿಧಿ = 220 m.

ಆದ್ದರಿಂದ, 'r' ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾದರೆ

$$2\pi r = 220$$

ಅಥವಾ $$2 \times \frac{22}{7} \times r = 220$$

ಅಥವಾ $$r = \frac{220 \times 7}{2 \times 22} = 35 \text{ m}$$

ಅಂದರೆ, ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೊಲದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 35 m ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೊಲದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2

$$= \frac{22}{7} \times 35 \times 35 \text{ m}^2$$

$$= 22 \times 5 \times 35 \text{ m}^2$$

ಈಗ 1 m^2 ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಹೊಲವನ್ನು ಉಳಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ 0.50

ಆದ್ದರಿಂದ, ಹೊಲವನ್ನು ಉಳಲು ತಗಲುವ ವೆಚ್ಚ = ₹ $22 \times 5 \times 35 \times 0.5$

= ₹ 1925

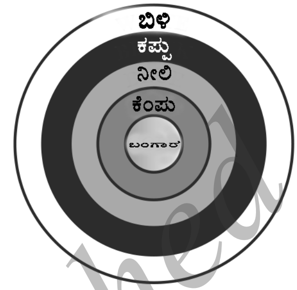
ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

[π ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ತನಕ, $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 19 cm ಮತ್ತು 9 cm ಇದೆ. ಈ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ಪರಿಧಿಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ವೃತ್ತ ಪರಿಧಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 8 cm ಮತ್ತು 6 cm ಆಗಿವೆ. ಈ ಎರಡು ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ ಬಂಗಾರ, ಕೆಂಪು, ನೀಲಿ, ಕಪ್ಪು ಮತ್ತು ಬಿಳಿ ಎಂಬ ಐದು ಅಂಕಗಳಿಕೆಯ ವಲಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಬಾಣದ ಗುರಿಫಲಕವನ್ನು ಚಿತ್ರ 5.3 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಬಂಗಾರ ವಲಯದ ವ್ಯಾಸವು 21 cm ಆಗಿದ್ದು ನಂತರದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಲಯಗಳು 10.5 cm ಅಗಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಈ ಐದು ಅಂಕಗಳಿಕೆಯ ವಲಯಗಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.3

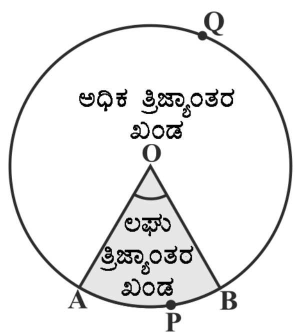
4. ಕಾರಿನ ಪ್ರತಿ ಚಕ್ರದ ವ್ಯಾಸ 80 cm ಇದೆ. ಕಾರು ಪ್ರತಿ ಗಂಟೆಗೆ 60 km ಜವದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸುವಾಗ ಪ್ರತಿ ಚಕ್ರವು 10 ನಿಮಿಷಗಳಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಸಂಪೂರ್ಣ ಸುತ್ತುಗಳನ್ನು ಸುತ್ತುತ್ತದೆ?

5. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉತ್ತರಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಆಯ್ಕೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ: ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಸುತ್ತಳತೆ ಮತ್ತು ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಸಾಂಖ್ಯಿಕವಾಗಿ ಸಮನಾಗಿದ್ದರೆ ಆ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು

A) 2 ಮಾನಗಳು B) π ಮಾನಗಳು C) 4 ಮಾನಗಳು D) 7 ಮಾನಗಳು

5.3 ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು:

ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ ಮತ್ತು ವೃತ್ತಖಂಡ ಪದಗಳನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಎರಡು ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಭಾಗವನ್ನು *'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ'* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಒಂದು ಜ್ಯಾ ಹಾಗೂ ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಂಸದಿಂದ ಆವೃತ್ತವಾದ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಭಾಗವನ್ನು 'ವೃತ್ತಖಂಡ' ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಹೀಗಾಗಿ ಚಿತ್ರ 5.4 ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ OAPB ವಲಯವು O ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಒಂದು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ. $\angle AOB$ ಯು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

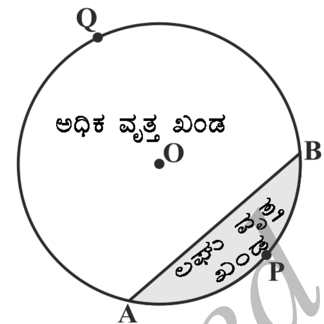


ಚಿತ್ರ 5.4

ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸದ ವಲಯ OAQB ಯು ಸಹ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಸ್ಫುಟವಾಗಿ ಭಾಗಗಳು ಗೋಚರಿಸುವುದರಿಂದ ವಲಯ OAPB ಯನ್ನು ಲಘು *ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ* ಮತ್ತು ವಲಯ OAQB ಯನ್ನು ಅಧಿಕ *ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ* ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವು $360^{\circ} - \angle AOB$ ಎಂದು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು.

ಈಗ ಚಿತ್ರ 5.5 ನ್ನು ನೋಡಿ 'O' ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದ ಜ್ಯಾ AB ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,

ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯ APB ಯು ವೃತ್ತಖಂಡವಾಗಿದೆ. ನೀವು AB ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸದ ಮತ್ತೊಂದು ವಲಯ AQB ಯು ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತಖಂಡ ಎಂದು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಭಾಗಗಳು ಸ್ಫುಟವಾಗಿ ಗೋಚರಿಸುವುದರಿಂದ APB ಯನ್ನು 'ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಮತ್ತು AQB ಯನ್ನು 'ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ' ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ.

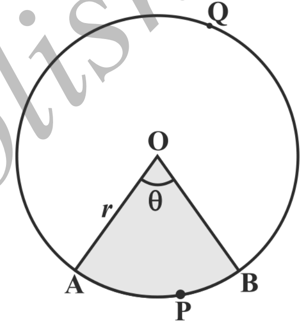


ಚಿತ್ರ 5.5

ಗಮನಿಸಿ: ನಾವು ಅನ್ಯಥಾ ಹೇಳದ ಹೊರತು 'ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಮತ್ತು 'ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಬರೆದರೆ ಅದು 'ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ' ಮತ್ತು 'ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ' ಎಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು.

ನಾವು ಈ ಜ್ಞಾನದೊಂದಿಗೆ, ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಕೆಲವು ಸಂಬಂಧ (ಸೂತ್ರ) ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಇರುವ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವು OAPB ಆಗಿರಲಿ (ಚಿತ್ರ 5.6 ನೋಡಿ). $\angle AOB$ ಯ ಅಳತೆಯು θ ಡಿಗ್ರಿಯಾಗಿರಲಿ.



ಚಿತ್ರ 5.6

ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಲಯ ಅಥವಾ ತಟ್ಟೆ) πr^2 ಎಂದು ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಲಯವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ 'O' ನಲ್ಲಿ 360° ಕೋನವನ್ನು ಉಂಟುಮಾಡುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ. ಏಕಾಂಶ ವಿಧಾನ ಅನ್ವಯಿಸಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ OAPB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು. ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು 360° ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2$.

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು 1 ಡಿಗ್ರಿ ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{\pi r^2}{360}$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಉಂಟಾದ ಕೋನವು θ ಆದಾಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

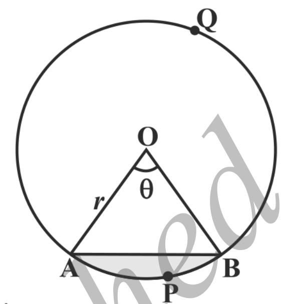
$$= \frac{\pi r^2}{360} \times \theta = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

ಹೀಗೆ, ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ಸಂಬಂಧ (ಸೂತ್ರ) ವನ್ನು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

θ ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \dfrac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ಇಲ್ಲಿ 'r' ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು 'θ' ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನ (ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ) ಆಗಿದೆ.

ಈಗ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ ಉಂಟಾಗುವ ಪ್ರಶ್ನೆ ಎಂದರೆ, ಈ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಕಂಸ APB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಹೌದು ಮತ್ತು ಏಕಾಂಶ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸುವುದರಿಂದ ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಸಂಪೂರ್ಣ ಉದ್ದವನ್ನು (360° ಕೋನಕ್ಕೆ) $2\pi r$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುವುದರಿಂದ ನಾವು ಬೇಕಾದ ಕಂಸ APB ಯ ಉದ್ದವನ್ನು $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ ಎಂದು ಪಡೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5.7

ಆದ್ದರಿಂದ, $\boldsymbol{\theta}$ ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದ = $\boldsymbol{\frac{\theta}{360} \times 2\pi r}$

ಈಗ ನಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರ O ಮತ್ತು ತ್ರಿಜ್ಯ r ಹೊಂದಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. (ಚಿತ್ರ 5.7 ನ್ನು ನೋಡಿ).

APB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAPB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 -$ ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

ಗಮನಿಸಿ: ಚಿತ್ರ 5.6 ಮತ್ತು 5.7 ರಿಂದ ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೀವು ಗಮನಿಸಬಹುದಾದ ಅಂಶಗಳೇಂದರೆ,

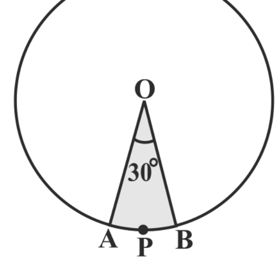
OAQB ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r^2 -$ OAPB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಮತ್ತು AQB ಅಧಿಕ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r^2 -$ APB ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: ತ್ರಿಜ್ಯ 4 cm ಮತ್ತು ಕೋನವು 30° ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಹಾಗೆಯೇ ಅನುರೂಪವಾದ ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

ಪರಿಹಾರ: OAPB ಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.8 ನ್ನು ನೋಡಿ)



ಚಿತ್ರ 5.8

ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 3.14 \times 4 \times 4$ cm^2

$= \frac{12.56}{3}$ cm^2 = 4.19 cm^2 (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\pi r^2 -$ APB ಲಘು ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= (3.14 \times 16 - 4.19)$ cm^2

$= 46.05$ cm^2

$= 46.1$ cm^2 (ಸರಿಸುಮಾರು)

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

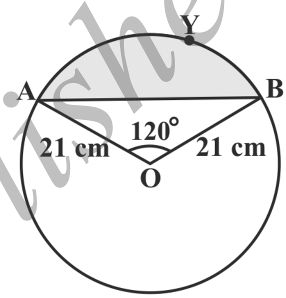
$$\text{ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \left(\frac{360^\circ - \theta}{360^\circ}\right) \times \pi r^2$$

$$= \left(\frac{360 - 30}{360}\right) \times 3.14 \times 16$$

$$= 46.05\ \text{cm}^2$$

$$= 46.1\ \text{cm}^2 \text{ (ಸರಿಸುಮಾರು)}$$

ಉದಾಹರಣೆ 3: ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 21 cm ಮತ್ತು $\angle AOB = 120^\circ$ ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 5.9 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ AYB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಬಳಸಿ)



ಚಿತ್ರ 5.9

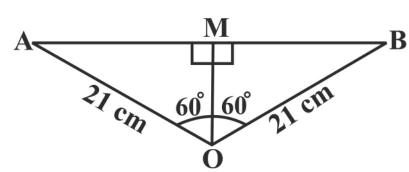
ಪರಿಹಾರ:

ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAYB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ (1)

$$\text{ಈಗ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

$$= 462\,\text{cm}^2 \qquad (2)$$

ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಚಿತ್ರ 5.10 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ $OM \perp AB$ ಎಳೆಯಿರಿ. OA = OB ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಲಂ.ವಿ.ಬಾ. ಸರ್ವಸಮತೆ ಪ್ರಕಾರ $\Delta AMO \cong \Delta BMO$



ಚಿತ್ರ 5.10

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು M ಮತ್ತು

$$\angle AOM = \angle BOM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

OM = x cm ಆಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔOMA ದಲ್ಲಿ, $$\frac{OM}{OA} = \cos 60^\circ$$

ಅಥವಾ, $$\frac{x}{21} = \frac{1}{2}$$

ಅಥವಾ, $x = \frac{21}{2}$ cm

ಹಾಗೆಯೇ, $\frac{AM}{OA} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AM = \frac{21\sqrt{3}}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $AB = 2\ AM = \frac{2 \times 21\sqrt{3}}{2}$ cm $= 21\sqrt{3}$ cm

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔOAB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2} \times AB \times OM$

$= \frac{1}{2} \times 21\sqrt{3} \times \frac{21}{2}$ cm^2

$= \frac{441\sqrt{3}}{4}$ cm^2 (3)

ಆದ್ದರಿಂದ, AYB ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \left(462 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ cm^2 [(1), (2) ಮತ್ತು (3) ರಿಂದ]

$= \frac{21}{2}(88 - 21\sqrt{3})$ cm^2

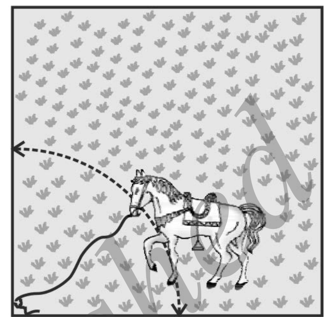
ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

[π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ತ್ರಿಜ್ಯವು 6 cm, ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕೋನವು 60° ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
2. ಪರಿಧಿಯು 22 cm ಇರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಗಡಿಯಾರದಲ್ಲಿ ನಿಮಿಷದ ಮುಳ್ಳಿನ ಉದ್ದವು 14 cm ಆಗಿದೆ. ಐದು ನಿಮಿಷದಲ್ಲಿ ಅದು ಕ್ರಮಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
4. 10 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಲಂಬಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ 1) ಲಘುವೃತ್ತಖಂಡ 2) ಅಧಿಕ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಬಳಸಿ).
5. 21 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಂಸವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. 1) ಕಂಸದ ಉದ್ದ 2) ಕಂಸದಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡ. 3) ಅನುರೂಪ ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 15 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 60° ಕೋನವನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಜ್ಯಾದಿಂದ ಉಂಟಾದ ಲಘು ವೃತ್ತ ಖಂಡ ಮತ್ತು ಅಧಿಕ ವೃತ್ತಖಂಡ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಹಾಗೂ $\sqrt{3} = 1.73$ ಎಂದು ಬಳಸಿ).

7. 12 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜ್ಯಾವು ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ 120° ಕೋನವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತದೆ. ಉಂಟಾದ ವೃತ್ತ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಹಾಗೂ $\sqrt{3} = 1.73$ ಎಂದು ಬಳಸಿ).

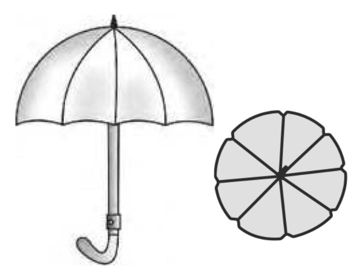
8. 15 m ಬಾಹುವಿರುವ ಚೌಕಾಕಾರದ ಒಂದು ಹುಲ್ಲಿನ ಮೈದಾನದ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಗೂಟಕ್ಕೆ ಕುದುರೆಯೊಂದನ್ನು 5 m ಉದ್ದದ ಹಗ್ಗದಿಂದ ಕಟ್ಟಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.11 ನ್ನು ನೋಡಿ)
   i) ಕುದುರೆಯು ಹುಲ್ಲನ್ನು ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ,
   ii) 5 m ಹಗ್ಗದ ಬದಲಾಗಿ 10 m ಹಗ್ಗ ಉಪಯೋಗಿಸಿದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಮೇಯಬಹುದಾದ ಮೈದಾನದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.


ಚಿತ್ರ 5.11

9. 35 mm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಪದಕವನ್ನು ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯಿಂದ ಮಾಡಿದೆ. ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ 5 ವ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ, ವೃತ್ತವನ್ನು ಸಮನಾದ 10 ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡಗಳಾಗಿ ಚಿತ್ರ 5.12 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ವಿಭಾಗಿಸಿದೆ.
   i) ಬೇಕಾಗುವ ಬೆಳ್ಳಿ ತಂತಿಯ ಉದ್ದ,
   ii) ಪದಕದಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.


ಚಿತ್ರ 5.12

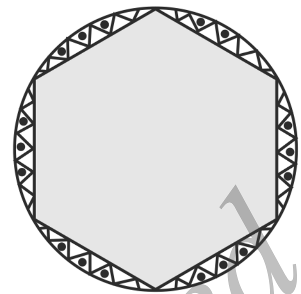
10. ಒಂದು ಕೊಡೆಯು ಸಮ ಅಂತರದಲ್ಲಿ 8 ಕಡ್ಡಿಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.13 ನ್ನು ನೋಡಿ). ಕೊಡೆಯು 45 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಚಪ್ಪಟೆಯಾದ ವೃತ್ತ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ, ಎರಡು ಅನುಕ್ರಮ ಕಡ್ಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.


ಚಿತ್ರ 5.13

11. ಒಂದು ಕಾರಿಗೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಅತಿಕ್ರಮಿಸದಂತಿರುವ ಎರಡು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣಗಳಿವೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಗಾಜೊರೆಸುವ ಉಪಕರಣವು 25 cm ಉದ್ದದ ಬ್ಲೇಡನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಇದು 115° ಕೋನದಲ್ಲಿ ಒರೆಸುತ್ತದೆ. ಬ್ಲೇಡ್‌ಗಳು ಒಂದು ಬಾರಿ ಜಾರಿದಾಗ ಸ್ವಚ್ಛಗೊಳಿಸುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

12. ನೀರಿನ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿರುವ ಬಂಡೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಎಚ್ಚರಿಸಲು ಒಂದು ದೀಪಸ್ತಂಭವು 80° ಕೋನವಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದಲ್ಲಿ 16.5 km ದೂರಕ್ಕೆ ಕೆಂಪು ಬೆಳಕನ್ನು ಹರಡುತ್ತದೆ. ಹಡಗುಗಳನ್ನು ಎಚ್ಚರಿಸುವ ಈ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಚಿತ್ರ 5.14 ರಲ್ಲಿ. ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಒಂದು ದುಂಡು ಮೇಜಿನ ಹೊದಿಕೆಯು ಆರು ಸಮವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಹೊದಿಕೆಯ ತ್ರಿಜ್ಯವು 28 cm ಆದರೆ ಪ್ರತಿ ಚದರ ಮೀಟರ್‌ಗೆ ₹ 0.35 ರ ದರದಂತೆ ವಿನ್ಯಾಸ ಮಾಡಲು ತಗಲುವ ಖರ್ಚೆಷ್ಟು? ($\sqrt{3}$ = 1.7 ಎಂದು ಬಳಸಿ).



ಚಿತ್ರ 5.14

14. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಸರಿಯಾದ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಗುರುತು ಹಾಕಿ:

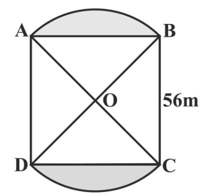
R ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ p (ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ) ಕೋನವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

A) $\frac{p}{180} \times 2\pi R$ B) $\frac{p}{180} \times 2\pi R^2$ C) $\frac{p}{360} \times 2\pi R$ D) $\frac{p}{720} \times 2\pi R^2$

5.4 ಜೋಡಿಸಿದ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ, ನಾವು ವಿವಿಧ ಆಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಲೆಕ್ಕಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ ನಾವು ಜೋಡಿಸಿದ ಸಮತಲಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ನಾವು ಈ ವಿಧದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ನಮ್ಮ ನಿತ್ಯ ಜೀವನದಲ್ಲಿ ನೋಡಿರಬಹುದು ಮತ್ತು ಇನ್ನು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಕಂಡಿರಬಹುದು. ಹೂ ಹಾಸು, ಚರಂಡಿಯ ಮುಚ್ಚಳ, ಕಿಟಕಿಯ ವಿನ್ಯಾಸ, ಮೇಜಿನ ಮೇಲಿನ ಹೊದಿಕೆಯ ವಿನ್ಯಾಸ ಮುಂತಾದವುಗಳು ಅವುಗಳಿಗೆ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ. ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಂದ ಇವುಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ನಾವು ವಿವರಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಚಿತ್ರ 5.15ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 56 m ಇರುವ ABCD ಚೌಕಾಕಾರದ ಹುಲ್ಲು ಹಾಸಿನ ಎರಡು ಅಂಚುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೂ ಹಾಸುಗಳಿವೆ. ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಹೂ ಹಾಸಿನ ಕೇಂದ್ರವು ಚೌಕಾಕಾರದ ಹುಲ್ಲು ಹಾಸಿನ ಕರ್ಣಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದು O ಆದರೆ ಹೂ ಹಾಸು ಹಾಗೂ ಹುಲ್ಲು ಹಾಸುಗಳ ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.15

ಪರಿಹಾರ: ಹುಲ್ಲು ಹಾಸಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 56 \times 56 \text{ m}^2$ (1)

$OA = OB = x$ ಮೀಟರ್‌ಗಳಾಗಿರಲಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^2 + x^2 = 56^2$

$2x^2 = 56 \times 56$

$x^2 = 56 \times 28$ (2)

ಈಗ, OAB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{90}{360} \times \pi x^2 = \frac{1}{4}\pi x^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 \text{ (ಸಮೀಕರಣ 2 ದಿಂದ)} \qquad (3)$$

ಮತ್ತು ΔAOB ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{4} \times 56 \times 56 \text{ m}^2$ ($\angle AOB = 90^\circ$) (4)

ಆದ್ದರಿಂದ, AB ಹೂ ಹಾಸಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \left(\frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 - \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{ m}^2$

[ಸಮೀಕರಣ (3) ಮತ್ತು (4) ರಿಂದ]

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} - 2\right) \text{ m}^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right) \text{ m}^2 \qquad (5)$$

ಇದೇ ರೀತಿ, ಇನ್ನೊಂದು ಹೂ ಹಾಸಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{ m}^2 \qquad (6)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \left(56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7} + \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \times \frac{8}{7}\right) \text{ m}^2$ [ಸಮೀಕರಣ (1), (5) ಮತ್ತು (6) ರಿಂದ]

$$= 28 \times 56 \left(2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{7}\right) \text{ m}^2$$

$$= 28 \times 56 \times \frac{8}{7} \text{ m}^2$$

$$= 4032 \text{ m}^2$$

ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

ಒಟ್ಟು ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = OAB ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ODC ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ΔOAD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ΔOBC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$$= \left(\frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{90}{360} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56 + \frac{1}{4} \times 56 \times 56\right) \text{ m}^2$$

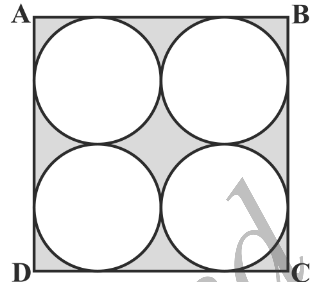
$$= \frac{1}{4} \times 28 \times 56 \left(\frac{22}{7} \times \frac{22}{7} + 2 + 2\right) \text{ m}^2$$

$$= \frac{7 \times 56}{7} (22 + 22 + 14 + 14) \text{ m}^2$$

$$= 56 \times 72 \text{ m}^2$$

$$= 4032 \text{ m}^2$$

ಉದಾಹರಣೆ 5: ABCD ಯು 14 cm ಬಾಹುವಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವಾದರೆ, ಚಿತ್ರ 5.16 ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.16

ಪರಿಹಾರ: ABCD ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 14 \times 14 \text{ cm}^2$

$= 196 \text{ cm}^2$

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವೃತ್ತಗಳ ವ್ಯಾಸ $= \frac{14}{7} \text{ cm} = 7 \text{ cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ $= \frac{7}{2} \text{ cm}$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$

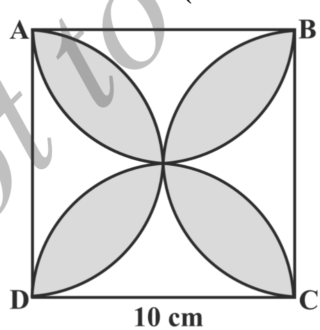
$= \frac{77}{7} \text{ cm}^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= 4 \times \frac{77}{7} = 154 \text{ cm}^2$

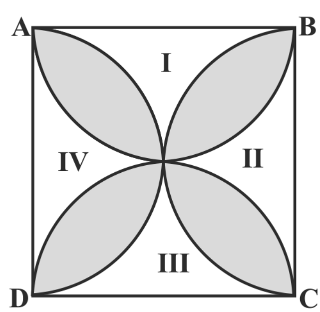
ಆದ್ದರಿಂದ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಲಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= (196 - 154) \text{ cm}^2$

$= 42 \text{ cm}^2$

ಉದಾಹರಣೆ 6: ABCD ಯು 10 cm ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಚೌಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಚೌಕದ ಬಾಹುವು ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಚಿತ್ರ 5.17 ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ($\pi = 3.14$ ಎಂದು ಬಳಸಿ)



ಚಿತ್ರ 5.17



ಚಿತ್ರ 5.18

ಪರಿಹಾರ: ನಾವು ಛಾಯಗೊಳಿಸದ ವಲಯಗಳನ್ನು I, II, III ಮತ್ತು IV ಎಂದು ಗುರುತಿಸೋಣ (ಚಿತ್ರ 5.18 ನ್ನು ನೋಡಿ).

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ I + ವಿಸ್ತೀರ್ಣ II

= ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – 5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಎರಡು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= \left(10 \times 10 - 2 \times \frac{1}{2} \times \pi \times 5^2\right) = (100 - 3.14 \times 25)\ cm^2$

$= (100 - 78.5)\ cm^2 = 21.5\ cm^2$

ಅದೇ ರೀತಿಯಾಗಿ, ವಿಸ್ತೀರ್ಣ II + ವಿಸ್ತೀರ್ಣ IV = $21.5\ cm^2$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

= ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – (I + II + III + IV) ರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

$= (100 - 2 \times 21.5)\ cm^2$

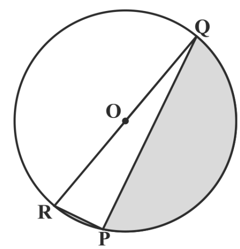
$= (100 - 43)\ cm^2$

$= 57\ cm^2$

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

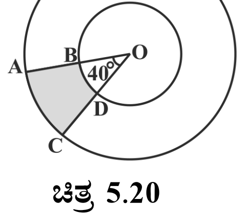
[π ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆ ಕೊಡದೆ ಇದ್ದಲ್ಲಿ, $\pi = \frac{22}{7}$ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ]

1. ಚಿತ್ರ 5.19 ರಲ್ಲಿ, PQ = 24 cm, PR = 7 cm ಮತ್ತು 'O' ವೃತ್ತಕೇಂದ್ರವಾದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

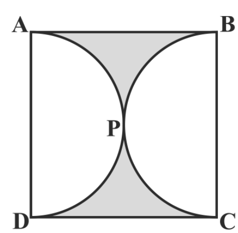


ಚಿತ್ರ 5.19

2. ಚಿತ್ರ 5.20 ರಲ್ಲಿ, ಕೇಂದ್ರ O ಇರುವ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7 cm ಮತ್ತು 14 cm ಇವೆ. ಮತ್ತು $\angle AOC = 40^\circ$ ಆದರೆ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯಕೃತ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



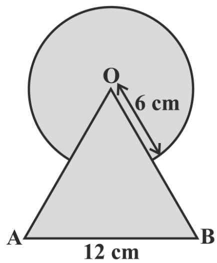
ಚಿತ್ರ 5.20



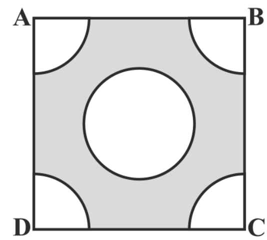
ಚಿತ್ರ 5.21

3. ಚಿತ್ರ 5.21 ರಲ್ಲಿ, ABCD ಯು 14 cm ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಚೌಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು APD ಹಾಗೂ APC ಗಳು ಅರ್ಧವೃತ್ತಗಳಾದರೆ, ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಚಿತ್ರ 5.22 ರಲ್ಲಿ, 12 cm ಬಾಹುವಿರುವ ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜ OAB ಯ ಶೃಂಗ 'O' ವನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು 6 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತಕಾರದ ಕಂಸವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



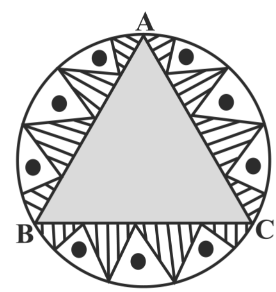
ಚಿತ್ರ 5.22



ಚಿತ್ರ 5.23

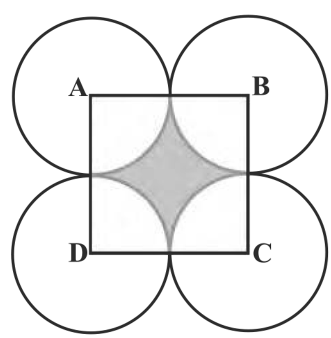
5. ಚಿತ್ರ 5.23 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, 4 cm ಬಾಹುವುಳ್ಳ ಒಂದು ಚೌಕದ ಪ್ರತಿ ಮೂಲೆಯಲ್ಲಿ 1 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕವನ್ನು ಮತ್ತು 2 cm ವ್ಯಾಸವಿರುವ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿದೆ. ಚೌಕದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. ಚಿತ್ರ 5.24 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, 32 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮೇಜಿನ ಹೊದಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಬಿಟ್ಟು ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಮಾಡಿದೆ. ವಿನ್ಯಾಸದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.24

7. ಚಿತ್ರ 5.25 ರಲ್ಲಿ, ABCD ಚೌಕದ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದ 14 cm. ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತವು ಉಳಿದ ಮೂರು ವೃತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡನ್ನು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ A, B, C ಮತ್ತು D ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರುವ ನಾಲ್ಕು ವೃತ್ತಗಳನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.25

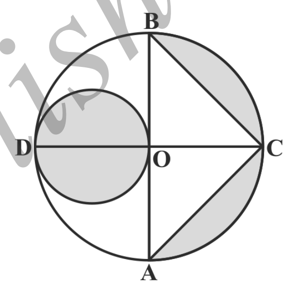
8. ಚಿತ್ರ 5.26 ರಲ್ಲಿ, ಎಡಭಾಗ ಮತ್ತು ಬಲಭಾಗದ ತುದಿಗಳ ಅರ್ಧವೃತ್ತಾಕಾರದಲ್ಲಿರುವ ಓಟದ ಪಥವನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 5.26

ಎರಡು ಒಳ ಸಮಾಂತರ ರೇಖಾಖಂಡಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 60 m ಮತ್ತು ಅವು ಪ್ರತಿಯೊಂದು 106 m ಉದ್ದವಿದೆ. ಓಟದ ಪಥವು 10 m ಅಗಲವಿದ್ದರೆ

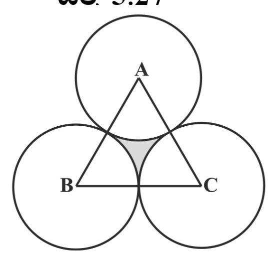
i) ಅದರ ಒಳ ಅಂಚಿನ ಸುತ್ತಲೂ ಓಟದ ಪಥದ ದೂರ
ii) ಓಟದ ಪಥದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಚಿತ್ರ 5.27 ರಲ್ಲಿ, O ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ AB ಮತ್ತು CD ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ವ್ಯಾಸಗಳಾಗಿವೆ. OD ಯು ಚಿಕ್ಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ವ್ಯಾಸವಾಗಿದೆ. OA = 7 cm ಆದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



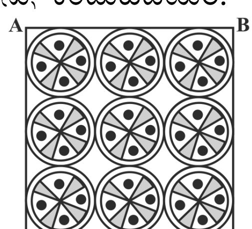
ಚಿತ. 5.27

10. ABC ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 17320.5 cm^2 ಆಗಿದೆ. ಪ್ರತಿ ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿಟ್ಟುಕೊಂಡು ಹಾಗು ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುವಿನ ಅರ್ಧದಷ್ಟು ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ ಒಂದೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 5.28 ನೋಡಿ). ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಮತ್ತು $\sqrt{3}$ = 1.73205 ಎಂದು ಬಳಸಿ).

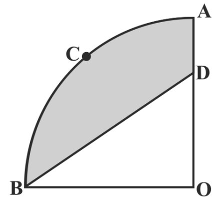


ಚಿತ್ರ 5.28

11. ಒಂದು ಚೌಕಾಕಾರದ ಕರವಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ, 7 cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂಬತ್ತು ವೃತ್ತಾಕಾರದ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಮಾಡಿದ್ದಾರೆ. (ಚಿತ್ರ 5.29 ನೋಡಿ). ಕರವಸ್ತ್ರದ ಉಳಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು, ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



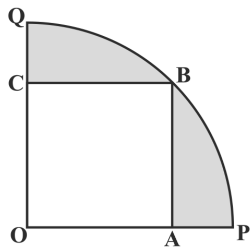
ಚಿತ್ರ 5.29



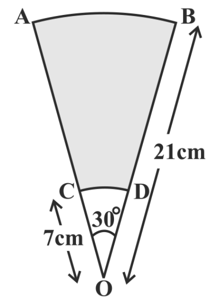
ಚಿತ್ರ 5.30

12. 5.30 ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, OACB ಯು O ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಮತ್ತು 3.5 cm ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ವೃತ್ತದ ಚತುರ್ಥಕವಾಗಿದೆ. OD = 2 cm ಆದರೆ i) ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕ ii) ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿರುವ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

13. ಚಿತ್ರ 5.31 ರಲ್ಲಿ, OABC ಚೌಕವು OPBQ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿ ಅಂತಸ್ಥವಾಗಿದೆ. OA = 20 cm ಆದರೆ ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. (π = 3.14 ಎಂದು ಬಳಸಿ).



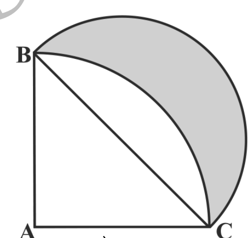
ಚಿತ್ರ 5.31



ಚಿತ್ರ 5.32

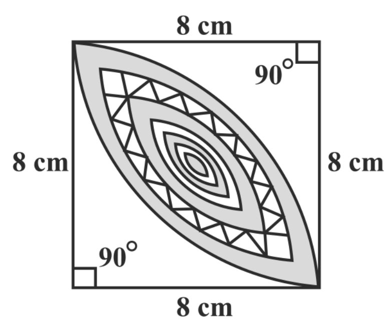
14. ತ್ರಿಜ್ಯ 21 cm ಮತ್ತು 7 cm ಇರುವ 'O' ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳ ಕಂಸಗಳು AB ಮತ್ತು CD (ಚಿತ್ರ 5.32 ನ್ನು ನೋಡಿ). $\angle AOB = 30^\circ$ ಆದರೆ, ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಛಾಯೆಗೊಳಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

15. ಚಿತ್ರ 5.33 ರಲ್ಲಿ, ABC ಯು 14 cm ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು BC ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಅರ್ಧವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ. ಛಾಯೆಗೊಳಿಸಿದ ಭಾಗದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.33

16. ಚಿತ್ರ 5.34 ರಲ್ಲಿ, 8 cm ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಎರಡು ವೃತ್ತ ಚತುರ್ಥಕಗಳ ನಡುವಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಲಯದ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 5.34

5.5 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಪಾಠದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ.

1. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ಪರಿಧಿ = $2\pi r$
2. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = πr^2
3. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ r ಮತ್ತು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ θ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ಕಂಸದ ಉದ್ದವು $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

4. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯ ಮತ್ತು ಡಿಗ್ರಿಯಲ್ಲಿ ಕೋನದ ಅಳತೆ ಇರುವ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$.

5. ಒಂದು ವೃತ್ತದ ವೃತ್ತಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ
= ಅನುರೂಪ ತ್ರಿಜ್ಯಾಂತರ ಖಂಡದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ಅನುರೂಪ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ.

❀ ❀ ❀

3XU1SG

ರಚನೆಗಳು 6

6.1 ಪೀಠಿಕೆ

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಗೆರೆ ಪಟ್ಟಿ (ruler) ಮತ್ತು ಕೈವಾರವನ್ನು ಬಳಸಿ ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಒಂದು ಕೋನವನ್ನು ಅರ್ಧಿಸುವುದು, ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡಕ್ಕೆ ಲಂಬಾರ್ಧಕವನ್ನು ಎಳೆಯುವುದು, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಕೆಲವು ರಚನೆಗಳು ಇತ್ಯಾದಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಸಮರ್ಥನೆಗಳನ್ನು ಕೂಡ ನೀಡಿರುತ್ತೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಹಿಂದಿನ ರಚನೆಗಳ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ ಇನ್ನೂ ಹಲವು ರಚನೆಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಸಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಇಂತಹ ರಚನೆಗಳು ಏಕೆ ಕಾರ್ಯ ನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದರ ಹಿಂದಿರುವ ಗಣಿತೀಯ ತಾರ್ಕಿಕತೆಯನ್ನು ನೀಡುವುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದು.

6.2 ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು

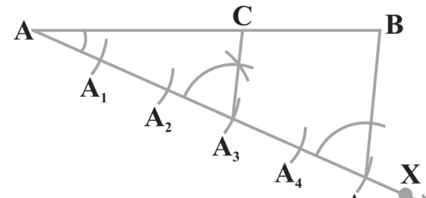
ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನೀಡಿದೆ ಮತ್ತು ನೀವು ಇದನ್ನು ದತ್ತ ಅನುಪಾತ, 3:2 ರಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕಿದೆ. ಈ ರೇಖಾಖಂಡದ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆದು, ನಂತರ ಇದರ ಮೇಲೆ ದತ್ತ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ ನೀವು ಇದನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಒಂದು ವೇಳೆ ನಿಮಗೆ ನಿಖರವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಅಳೆಯಲಾಗದಿದ್ದರೆ, ಈ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವಿರಿ? ಅಂತಹ ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ನಾವು ಈ ಕೆಳಗೆ ಎರಡು ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದೇವೆ.

ರಚನೆ 6.1

ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ದತ್ತ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವುದು

AB ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ನೀಡಿದೆ, ಇದನ್ನು m:n ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ನಾವು ವಿಭಾಗಿಸಬೇಕಿದೆ, ಇಲ್ಲಿ m ಮತ್ತು n ಗಳೆರಡೂ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ. ಇದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ನಿಮಗೆ ಸಹಾಯವಾಗುವಂತೆ ನಾವು $m = 3$ ಮತ್ತು $n = 2$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು:



ಚಿತ್ರ 6.1

1. AB ಯೊಂದಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಒಂದು ಕಿರಣ AX ಎಳೆಯಿರಿ.

2. $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ ಆಗುವಂತೆ AX ನ ಮೇಲೆ A_1, A_2, A_3, A_4 ಮತ್ತು

A_5 ಎಂಬ 5 (=m+n) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.

3. B, A_5 ಸೇರಿಸಿ.

4. AB ಯನ್ನು 'C' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ A_3 ಯಲ್ಲಿ $\underline{|AA_5B}$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿರುವ ಕೋನವನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಿಂದ A_5B ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 6.1 ನೋಡಿ) ಈಗ AC : CB = 3 : 2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ವಿಧಾನದಿಂದ ನಮಗೆ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ವಿಭಜನೆಯು ಹೇಗೆ ದೊರೆಯಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಈಗ, $A_3C \parallel A_5B$

$\therefore \dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{AC}{CB}$ (ಮೂಲ ಸಮಾನುಪಾತತೆಯ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ)

ರಚನೆಯಿಂದ, $\dfrac{AA_3}{A_3A_5} = \dfrac{3}{2}$ $\therefore \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{3}{2}$ (ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 1)

C ಯು AB ಯನ್ನು 3:2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

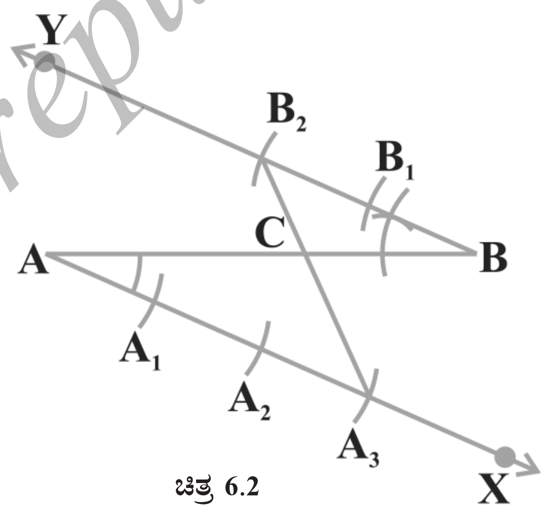
ಪರ್ಯಾಯ ವಿಧಾನ:

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು:

1. AB ಯೊಂದಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಒಂದು ಕಿರಣ AX ಎಳೆಯಿರಿ.

2. $\underline{|ABY} = \underline{|BAX}$ ಆಗುವಂತೆ AX ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ BY ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

3. $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = BB_1 = B_1B_2$ ಆಗುವಂತೆ AXನ ಮೇಲೆ A_1, A_2, A_3 (m = 3) ಮತ್ತು BY ನ ಮೇಲೆ B_1, B_2 (n = 2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.2

4. A_3, B_2 ಸೇರಿಸಿ ಇದು AB ಯನ್ನು 'C' ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.2 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಈಗ AC:CB = 3:2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ವಿಧಾನವು ಏಕೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಇಲ್ಲಿ, $\Delta\, AA_3C \sim \Delta\, BB_2C$ (ಏಕೆ?)

$\therefore \dfrac{AA_3}{BB_2} = \dfrac{AC}{BC}$

ರಚನೆಯಿಂದ, $\dfrac{AA_3}{BB_2} = \dfrac{3}{2}$, $\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{2}$ (ಸ್ವಯಂ ಸಿದ್ಧ 1)

ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಮೇಲೆ ಕೊಟ್ಟ ವಿಧಾನಗಳು ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಯಾವುದೇ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲು ಸೂಕ್ತವಾಗಿವೆ.

ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾಗ, ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಈ ಮೇಲಿನ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ.

ರಚನೆ 6.2: *ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ಅನುಪಾತಾಂಕ (Scale - Factor) ವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾಗ, ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.*

ಈ ರಚನೆಯು ಎರಡು ವಿವಿಧ ಸನ್ನಿವೇಶಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ. ಒಂದರಲ್ಲಿ ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಮತ್ತು ಇನ್ನೊಂದರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದಾದ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಅನುಪಾತಾಂಕವೆಂದರೆ ರಚಿಸಬೇಕಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. [ಅಧ್ಯಾಯ 2ನ್ನು ಸಹ ನೋಡಿ].

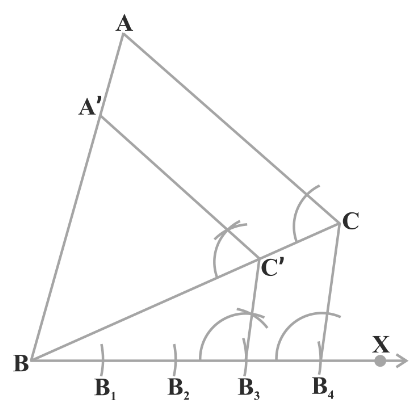
ಈ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. **ಸಾಮಾನ್ಯ ಪ್ರಕರಣಕ್ಕೆ ಸಹ ಇದೇ ರೀತಿಯ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.**

ಉದಾಹರಣೆ 1: ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{3}{4}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ [ಅಂದರೆ, ಅನುಪಾತಾಂಕ $\frac{3}{4}$ ಇರುವಂತೆ]

ಪರಿಹಾರ: ABC ಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ ಈಗ ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{3}{4}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು:

1. ಶೃಂಗ A ಯ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು BC ಯೊಂದಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಒಂದು ಕಿರಣ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.
2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ ಆಗುವಂತೆ BX ನ ಮೇಲೆ B_1, B_2, B_3 ಮತ್ತು B_4 ಎಂಬ 4 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ($\frac{3}{4}$ ರಲ್ಲಿನ 3 ಮತ್ತು 4 ರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು) ಗುರುತಿಸಿ.
3. B_4, C ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು B_4C ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ B_3 (3ನೇ ಬಿಂದು, $\frac{3}{4}$ ರಲ್ಲಿನ 3 ಮತ್ತು 4 ರಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕದು) ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು BC ಯನ್ನು C' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 6.3

4. CA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ C' ನ ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು BA ಯನ್ನು A' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.3 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಈಗ Δ A'BC' ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ.

ಈ ರಚನೆಯಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಭುಜವು ಹೇಗೆ ದೊರೆಯಿತು ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ರಚನೆ 6.1 ರಿಂದ, $\dfrac{BC'}{C'C} = \dfrac{3}{1}$

$$\therefore \frac{BC}{BC'} = \frac{BC' + C'C}{BC'}$$

$$= 1 + \frac{C'C}{BC'}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

ಅಂದರೆ, $\dfrac{BC'}{BC} = \dfrac{3}{4}$

ಇದಲ್ಲದೆ $C'A' \parallel CA$. $\therefore \Delta A'BC' \sim \Delta ABC$ (ಏಕೆ?)

$$\therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{4}$$

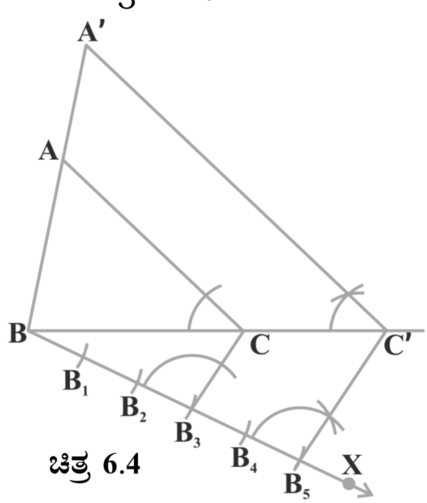
ಉದಾಹರಣೆ 2: ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜ ABC ಗೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\dfrac{5}{3}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ (ಅಂದರೆ, ಅನುಪಾತಾಂಕ $\dfrac{5}{3}$ ಇರುವಂತೆ)

ಪರಿಹಾರ: ABC ಯು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿದೆ. ಈಗ ನಾವು ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\dfrac{5}{3}$ ರಷ್ಟಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು:

1. ಶೃಂಗ A ಯ ಅಭಿಮುಖ ಬಾಹು, BC ಯೊಂದಿಗೆ ಒಂದು ಲಘುಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಯಾವುದೇ ಕಿರಣ BX ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ

2. $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ ಆಗುವಂತೆ BX ನ ಮೇಲೆ B_1, B_2, B_3, B_4 ಮತ್ತು B_5 ಎಂಬ 5 ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ($\dfrac{5}{3}$ ರಲ್ಲಿ 5 ಮತ್ತು 3 ರಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡದು) ಗುರುತಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 6.4

3. B_3 (3ನೇ ಬಿಂದು, $\frac{5}{3}$ ರಲ್ಲಿ 3 ಮತ್ತು 5 ರಲ್ಲಿ ಚಿಕ್ಕದು) ಯನ್ನು C ಗೆ ಸೇರಿಸಿ. B_3C ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ B_5 ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಇದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BC ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು C' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.

4. CA ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿರುವಂತೆ C' ನ ಮೂಲಕ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ವೃದ್ಧಿಸಿದ BA ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು A' ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ (ಚಿತ್ರ 6.4 ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಈ ರಚನಾ ಹಂತಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಲು

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ (ಏಕೆ?)

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{BC'}$$

ಆದರೆ, $$\frac{BC}{BC'} = \frac{BB_3}{BB_5} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}, \text{ ಮತ್ತು } \quad \therefore \frac{A'B}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{BC'}{BC} = \frac{5}{3}$$

ಗಮನಿಸಿ: ಉದಾಹರಣೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರಲ್ಲಿ, AB ಅಥವಾ AC ಯೊಂದಿಗೆ ಲಘುಕೋನ ಏರ್ಪಡುವಂತೆ ಒಂದು ಕಿರಣವನ್ನು ಎಳೆದು ಇದೇ ರೀತಿ ಮುಂದುವರಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.1

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ರಚನಾ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ಸಹ ನೀಡಿರಿ.

1. 7.6cm ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು 5 : 8 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಿ. ಎರಡೂ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

2. 4cm, 5cm ಮತ್ತು 6cm ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನಂತರ ಇದಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ರಚಿಸಬೇಕಾದ ಈ ತ್ರಿಭುಜದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವು ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{2}{3}$ ರಷ್ಟು ಇರಬೇಕು

3. 5cm, 6cm ಮತ್ತು 7cm ಬಾಹುಗಳಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು, ಅದರ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವು ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{7}{5}$ ರಷ್ಟಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.

4. ಪಾದ 8cm ಮತ್ತು ಎತ್ತರ 4cm ಇರುವ ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳು ಮೊದಲು ರಚಿಸಿದ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $1\frac{1}{2}$ ರಷ್ಟಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.

5. $BC = 6cm$, $AB = 5cm$ ಮತ್ತು $\angle ABC = 60^{o}$ ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳು ತ್ರಿಭುಜ ABC ಯ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{3}{4}$ ರಷ್ಟಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.
6. $BC = 7cm$, $\angle B = 45^{o}$, $\angle A = 105^{o}$ ಇರುವಂತೆ ABC ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ ನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳು, ΔABC ಯ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{4}{3}$ ರಷ್ಟಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.
7. ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದ 4cm ಮತ್ತು 3cm (ವಿಕರ್ಣವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿದ) ಇರುವ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ನಂತರ ಮತ್ತೊಂದು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳ, ಮೊದಲ ತ್ರಿಭುಜದ ಅನುರೂಪ ಬಾಹುಗಳ $\frac{5}{3}$ ರಷ್ಟಿರುವಂತೆ ರಚಿಸಿ.

6.3 ಒಂದು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು

ಅಧ್ಯಾಯ 4ರಲ್ಲಿ ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಇರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಳೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಆದರೆ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಮಾತ್ರ ಇರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದು ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಎಳೆದ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನೀವು ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ ಒಂದು ಸ್ಪರ್ಶಕ ಎಳೆಯಲು, ಸರಳವಾಗಿ ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಎಳೆದು, ಆ ತ್ರಿಜ್ಯಕ್ಕೆ ಅದೇ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆದರೆ, ಅದು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿದ್ದರೆ, ಆ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ.

ಈಗ ನಾವು ಇಂತಹ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು ಹೇಗೆ ಎಂದು ನೋಡೋಣ.

ರಚನೆ 6.3: *ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.*

'O' ಕೇಂದ್ರವಿರುವ ವೃತ್ತವನ್ನು ಮತ್ತು ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು 'P'ನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. 'P' ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ನಾವು ರಚಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ.

ರಚನಾ ಹಂತಗಳು:

1. P, O ಸೇರಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು ಅರ್ಧಿಸಿ. PO ನ ಮಧ್ಯಬಿಂದು 'M' ಆಗಿರಲಿ
2. 'M' ನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ MO ತ್ರಿಜ್ಯದಿಂದ, ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು ದತ್ತ ವೃತ್ತವನ್ನು 'Q' ಮತ್ತು 'R' ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.
3. P,Q ಮತ್ತು P,R ಸೇರಿಸಿ.

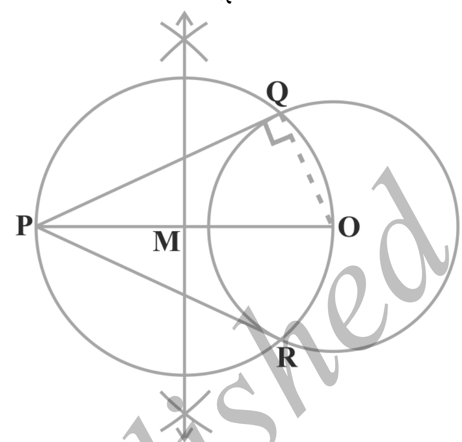
ಈಗ, PQ ಮತ್ತು PR ಗಳು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಎರಡು ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳಾಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 6.5ನ್ನು ನೋಡಿ)

ಈಗ ಈ ರಚನೆಯು ಹೇಗೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ. O, Q ಸೇರಿಸಿ. $\angle PQO$ ಅರ್ಧವೃತ್ತಖಂಡದ ಕೋನವಾಗಿದೆ.

$\therefore \angle PQO = 90^{\circ}$

ಈಗ $PQ \perp OQ$ ಎಂದು ಹೇಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ?

OQ ಎಂಬುದು ದತ್ತ ವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವಾದುದರಿಂದ PQ ವು ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಬೇಕು. ಇದೇ ರೀತಿ PR ಕೂಡ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 6.5

ಸೂಚನೆ: ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ನೀಡದಿದ್ದಾಗ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮಾಂತರವಲ್ಲದ ಜ್ಯಾಗಳನ್ನು ಎಳೆದು, ಅವುಗಳ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳು ಛೇದಿಸುವ ಬಿಂದುವನ್ನೇ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವೆಂದು ಗುರುತಿಸಬಹುದು. ನಂತರ ನೀವು ಮೇಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿಯಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 6.2

ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿ ರಚನಾ ಹಂತಗಳಿಗೆ ಸಮರ್ಥನೆಯನ್ನು ಸಹ ನೀಡಿರಿ.

1. 6cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಇದರ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 10cm ದೂರದ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ.

2. 4cm ಮತ್ತು 6cm ತ್ರಿಜ್ಯಗಳಿರುವ ಎರಡು ಏಕಕೇಂದ್ರೀಯ ವೃತ್ತಗಳಿವೆ. 6cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ 4cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ಉದ್ದವನ್ನು ಅಳೆಯಿರಿ. ಅಳತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಚಾರದಿಂದ ತಾಳೆನೋಡಿ.

3. 3cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದರ ಒಂದು ವ್ಯಾಸವನ್ನು ಎರಡೂ ಕಡೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ ಅದರ ಮೇಲೆ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಪ್ರತಿ ಬಿಂದುವು 7cm ದೂರದಲ್ಲಿರುವಂತೆ p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ. ಈ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

4. 5cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ, ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳ ನಡುವಿನ ಕೋನ 60° ಇರುವಂತೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ.

5. AB = 8cm ಇರುವ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡ ಎಳೆಯಿರಿ. 'A' ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ 4cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ ಮತ್ತು 'B' ಯನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿರಿಸಿ 3cm ತ್ರಿಜ್ಯದ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ರಚಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಮತ್ತೊಂದು ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

6. $AB = 6cm$, $BC = 8cm$ ಮತ್ತು $\angle B = 90^{\circ}$ ಇರುವ ΔABC ಯು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ. BD ಯು 'B' ನಿಂದ AC ಯ ಮೇಲಿನ ಲಂಬವಾಗಿದೆ. B, C, D ಮೂಲಕ ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆದಿದೆ 'A' ನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿ.

7. ಒಂದು ಬಳೆಯ ಸಹಾಯದಿಂದ ಒಂದು ವೃತ್ತವನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ವೃತ್ತದ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿರಿ.

6.4 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಕೆಳಗಿನ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಮಾಡುವುದೆಂದು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. ದತ್ತ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವುದು.
2. 1ಕ್ಕಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಅನುಪಾತಾಂಕವನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾಗ, ಅದಕ್ಕನುಗುಣವಾಗಿ ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪ ತ್ರಿಭುಜವನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.
3. ವೃತ್ತಕ್ಕೆ ಹೊರಗಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬಿಂದು ಜೊತೆ ಸ್ಪರ್ಶಕಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ರಚನೆ 6.2 ರ ಉದಾಹರಣೆ 1 ಮತ್ತು 2 ರಲ್ಲಿ ಬಳಸಿದ ರೀತಿಯ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸಿ ದತ್ತ ಅನುಪಾತಾಂಕದಿಂದ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜ (ಅಥವಾ ಬಹುಭುಜ) ಕ್ಕೆ ಸಮರೂಪವಾಗಿರುವ ಇನ್ನೊಂದು ಚತುರ್ಭುಜ (ಅಥವಾ ಬಹುಭುಜ) ದ ರಚನೆಯನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

❀ ❀ ❀

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ 7

7.1 ಪೀಠಿಕೆ

ಒಂದು ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು, ನಮಗೆ ಒಂದು ಜೊತೆ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ. y – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅದರ **x – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ** ಅಥವಾ **ಕ್ಷಿತಿಜ ದೂರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. x – ಅಕ್ಷದಿಂದ ಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಅದರ **y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ** ಅಥವಾ **ಲಂಬದೂರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(x, 0)$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ಹಾಗೂ y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (0, y) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ.

ಇಲ್ಲಿ ನಿಮಗೊಂದು ಆಟವಿದೆ. ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿರುವ ಅಕ್ಷಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಈಗ ಈ ಮುಂದಿನ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿ, ಸೂಚನೆಯಂತೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುತ್ತಾ ಹೋಗಿ. A (4, 8) ಬಿಂದುವನ್ನು B(3, 9) ಕ್ಕೆ, C(3, 8)ಕ್ಕೆ, D(1, 6)ಕ್ಕೆ, E(1, 5)ಕ್ಕೆ, F (3, 3)ಕ್ಕೆ, G (6, 3)ಕ್ಕೆ, H (8, 5)ಕ್ಕೆ, I (8, 6)ಕ್ಕೆ, J (6, 8)ಕ್ಕೆ, K (6, 9)ಕ್ಕೆ, L (5, 8)ಕ್ಕೆ, A ಗೆ ಸೇರಿಸಿ. ಆ ಬಳಿಕ, P (3.5, 7), Q (3, 6) ಮತ್ತು R (4, 6) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಸೇರಿಸಿ. X (5.5, 7), Y (5, 6) ಮತ್ತು Z (6, 6) ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಕೂಡಾ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ ಸೇರಿಸಿ. ಈಗ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುವಂತೆ S (4, 5), T (4.5, 4) ಮತ್ತು U (5, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ ಹಾಗೂ U ನ್ನು (9, 5) ಮತ್ತು (9, 6) ಬಿಂದುಗಳಿಗೆ ಸೇರಿಸಿ. ನಿಮಗೆ ಯಾವ ಚಿತ್ರ ದೊರೆಯಿತು?

$ax + by + c = 0$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುವ (a, b ಗಳು ಏಕಕಾಲಕ್ಕೆ ಸೊನ್ನೆಗಳಲ್ಲ), ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳು, ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವಾಗ ಸರಳರೇಖೆಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. ಅಲ್ಲದೆ, ಅಧ್ಯಾಯ 9 ರಲ್ಲಿ $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ಇದರ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಪರವಲಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಕೂಡಾ ನೀವು ನೋಡಲಿರುವಿರಿ. ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಕೃತಿಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕೆ ಒಂದು ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನವಾಗಿ, ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ಅಭಿವೃದ್ಧಿ ಹೊಂದಿತು. ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ, ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸಮಾಡಲು ಮತ್ತು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಇದು ನಮಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದಾಗಿ, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್,

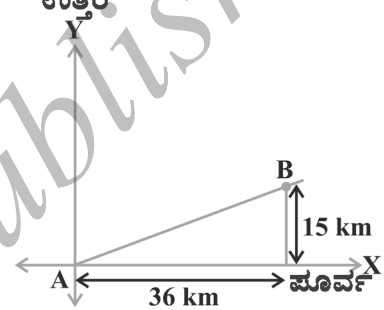
ಸಮುದ್ರಯಾನ, ಭೂಕಂಪ ಶಾಸ್ತ್ರ ಮತ್ತು ಕಲೆಗಳಂತಹ ಅನೇಕ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳಲ್ಲಿ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತವು ವಿಪುಲವಾಗಿ ಅನ್ವಯಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ.

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ತಿಳಿದಿದ್ದಾಗ, ಆ ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬುದೆಂಬುದನ್ನು ಹಾಗೂ ದತ್ತ ಮೂರು ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದನ್ನು ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡುವಿರಿ. ಎರಡು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಒಂದು ದತ್ತ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನೂ ಕೂಡಾ ನೀವು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುವಿರಿ.

7.2 ದೂರಸೂತ್ರ

ಕೆಳಗಿನ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ:

B ಎಂಬ ನಗರವು, A ಎಂಬ ನಗರದಿಂದ 36km ಪೂರ್ವದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು 15km ಉತ್ತರದಲ್ಲಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅಳತೆ ಮಾಡದೆ, A ನಗರದಿಂದ B ನಗರಕ್ಕಿರುವ ದೂರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಿರಿ? ನಾವು ನೋಡೋಣ. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.1 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು. ಈ ದೂರವನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಲು ನೀವು ಪೈಥಾಗೊರಸ್‌ನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.

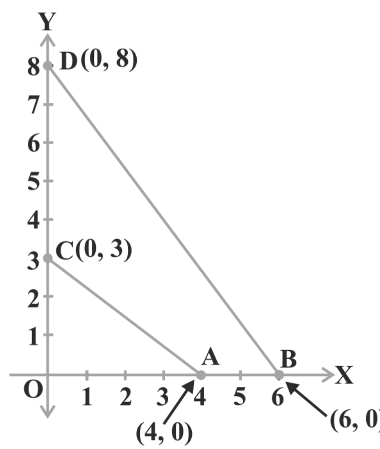


ಚಿತ್ರ 7.1

ಈಗ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವೆ? ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಚಿತ್ರ 7.2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, A (4, 0) ಮತ್ತು B (6, 0) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿವೆ.

ಚಿತ್ರದಿಂದ, OA = 4 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು OB = 6 ಮಾನಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ, A ಯಿಂದ B ಗಿರುವ ದೂರ, ಅಂದರೆ, AB = OB - OA = 6 – 4 = 2 ಮಾನಗಳು.

ಹೀಗೆ, ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳು x – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ನಾವು ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.



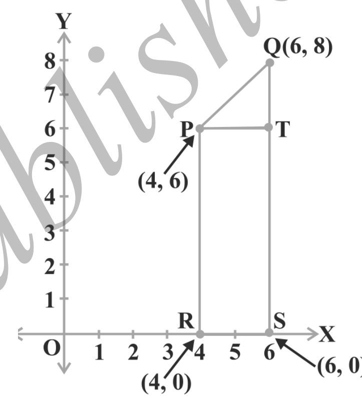
ಚಿತ್ರ 7.2

ಈಗ, y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? C (0, 3) ಮತ್ತು D (0, 8) ಬಿಂದುಗಳು y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಮೊದಲಿನ ರೀತಿಯಲ್ಲೇ ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ಎಂದರೆ, CD = 8 – 3 = 5 ಮಾನಗಳು (ಚಿತ್ರ 7.2 ನ್ನು ನೋಡಿ.)

ಮುಂದೆ A ಯಿಂದ C ಗಿರುವ ದೂರವನ್ನು (ಚಿತ್ರ 7.2 ರಲ್ಲಿ) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಿಮಗೆ ಸಾಧ್ಯವೇ? OA = 4 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು OC = 3 ಮಾನಗಳು ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, C ಯಿಂದ A ಗಿರುವ ದೂರ ಅಂದರೆ AC = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = 5 ಮಾನಗಳು. ಅದೇ ರೀತಿ, D ಯಿಂದ B ಗಿರುವ ದೂರ = BD = 10 ಮಾನಗಳು ಎಂದು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಈಗ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ ಇಲ್ಲದ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿದರೆ, ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಹೌದು. ಇದಕ್ಕಾಗಿ ನಾವು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಚಿತ್ರ 7.3 ರಲ್ಲಿ, P (4, 6) ಮತ್ತು Q (6, 8) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದನೇ ಚತುರ್ಥಕದಲ್ಲಿವೆ. ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಹೇಗೆ ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು? P ಮತ್ತು Q ಗಳಿಂದ x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ PR ಮತ್ತು QS ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯೋಣ. PT ಯನ್ನು QS ಗೆ ಲಂಬವಾಗಿ ಎಳೆಯೋಣ. ಆಗ R ಮತ್ತು S ಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (4, 0) ಮತ್ತು (6, 0). ಆದ್ದರಿಂದ RS = 2 ಮಾನಗಳು, QS = 8 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು TS = PR = 6 ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 7.3

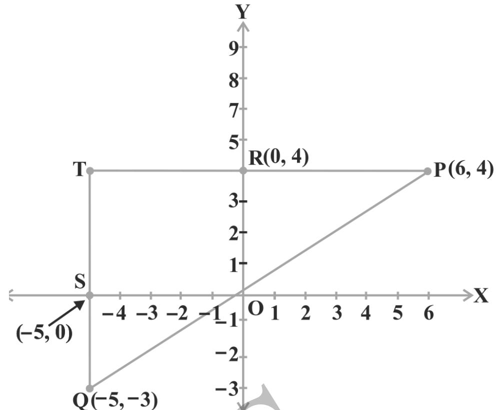
ಆದ್ದರಿಂದ, QT = 2 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು PT = RS = 2 ಮಾನಗಳು

ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$
$$= 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\therefore \quad PQ = 2\sqrt{2} \text{ ಮಾನಗಳು}$$

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಚತುರ್ಥಕಗಳಲ್ಲಿರುವ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು?

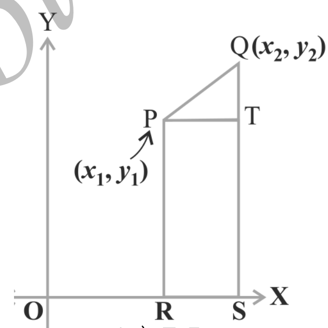
P (6, 4) ಮತ್ತು Q (–5, –3) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ (ಚಿತ್ರ 7.4 ನ್ನು ನೋಡಿ). x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬವಾಗಿ QS ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. QS ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ. PT ⊥ QS ನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಇದು y – ಅಕ್ಷವನ್ನು R ನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸಲಿ.



ಚಿತ್ರ 7.4

ಆಗ PT = 11 ಮಾನಗಳು ಮತ್ತು QT = 7 ಮಾನಗಳು. (ಏಕೆ)?

ΔPTQ ನಲ್ಲಿ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ PQ $=\sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ ಮಾನಗಳು.



ಚಿತ್ರ 7.5

P (x_1, y_1) ಮತ್ತು Q (x_2, y_2) ಎಂಬ ಯಾವುದಾದರೂ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ನಾವೀಗ ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. x – ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ PR ಮತ್ತು QS ಎಂಬ ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. PT $\perp$ QS ಎಳೆಯಿರಿ. (ಚಿತ್ರ 7.5 ನ್ನು ನೋಡಿ) ಆಗ, OR = x_1 , OS = x_2 ಆದ್ದರಿಂದ, RS = $x_2 - x_1$ = PT. ಅಲ್ಲದೆ, SQ = y_2, ST = PR = y_1 ಆದ್ದರಿಂದ, QT = $y_2 - y_1$. ΔPTQ ನಲ್ಲಿ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ದೂರವು ಎಂದಿಗೂ ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಧನಾತ್ಮಕ ವರ್ಗಮೂಲವನ್ನು ಮಾತ್ರ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, P (x_1, y_1) ಮತ್ತು Q (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವು,

$$\mathbf{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

ಇದನ್ನು **'ದೂರಸೂತ್ರ'** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ

ಸೂಚನೆ:

1. ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, P (x, y) ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿಗೆ ಮೂಲಬಿಂದು (0, 0) ಯಿಂದ ಇರುವ ದೂರವು $$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. PQ = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ಎಂದು ಕೂಡಾ ನಾವು ಬರೆಯಬಹುದು. ಏಕೆ?

ಉದಾಹರಣೆ 1: (3, 2), (–2, –3) ಮತ್ತು (2, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ತ್ರಿಭುಜ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆಯೆ? ಹೌದು ಎಂದಾದರೆ, ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: PQ, QR ಮತ್ತು PR ದೂರಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ದೂರಸೂತ್ರವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ P (3, 2), Q (–2, –3) ಮತ್ತು R (2, 3) ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು.

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (ಅಂದಾಜು)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (ಅಂದಾಜು)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (ಅಂದಾಜು)}$$

ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ದೂರಗಳ ಮೊತ್ತವು, ಮೂರನೇ ದೂರಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವುದರಿಂದ, P, Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳು ತ್ರಿಭುಜವನ್ನುಂಟುಮಾಡುತ್ತವೆ.

ಅಲ್ಲದೆ, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದ ಪ್ರಕಾರ $\angle P = 90^\circ$ ಎಂದು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ PQR ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಭುಜ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: (1, 7), (4, 2), (–1, –1) ಮತ್ತು (–4, 4) ಬಿಂದುಗಳು ಚೌಕದ ಶೃಂಗಗಳು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) ಮತ್ತು D (–4, 4) ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ABCD ಒಂದು ಚೌಕವೆಂದು ತೋರಿಸುವ ಒಂದು ವಿಧಾನವೆಂದರೆ, ಎಲ್ಲಾ ಬಾಹುಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು ಮತ್ತು ಎರಡು ಕರ್ಣಗಳು ಸಮಾನವಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬ ಗುಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು.

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

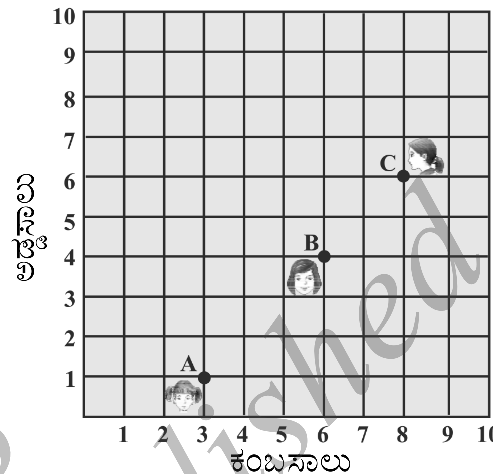
$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68}$$

AB = BC = CD = DA ಮತ್ತು AC = BD ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮ ಹಾಗೂ ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಗಳು ಕೂಡಾ ಸಮ. ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಚೌಕ.

ಪರ್ಯಾಯ ಪರಿಹಾರ: ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಮತ್ತು AC ಕರ್ಣವನ್ನು, ಮೇಲೆ ಸೂಚಿಸಿರುವಂತೆ, ನಾವು ಕಂಡಿಹಿಡಿಯೋಣ. ಇಲ್ಲಿ $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪೈಥಾಗೊರಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ವಿಲೋಮದಿಂದ, $\angle D = 90^{O}$ ಎಲ್ಲಾ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳು ಸಮವಾಗಿದ್ದು ಒಂದು ಕೋನವು 90^{O} ಇರುವ ಚತುರ್ಭುಜವು ಚೌಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ABCD ಒಂದು ಚೌಕ.



ಚಿತ್ರ 7.6

ಉದಾಹರಣೆ 3: ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಡೆಸ್ಕುಗಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.6 ತೋರಿಸುತ್ತದೆ. ಅಶೀಮಾ, ಭಾರತಿ ಮತ್ತು ಕ್ಯಾಮೆಲಾ ಕ್ರಮವಾಗಿ A (3, 1), B (6, 4) ಮತ್ತು C (8, 6) ರಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಮೂರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿನಿಯರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆಂದು ನಿಮಗೆ ಅನಿಸುತ್ತದೆಯೆ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕೊಡಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದೂರಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ A, B ಮತ್ತು C ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಅವರು ಒಂದೇ ಸರಳರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿದ್ದಾರೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: (x, y) ಬಿಂದುವು (7, 1) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : P (x, y) ಬಿಂದುವು A (7, 1) ಮತ್ತು B (3, 5) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸೋಣ. AP = BP ಎಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $AP^2 = BP^2$

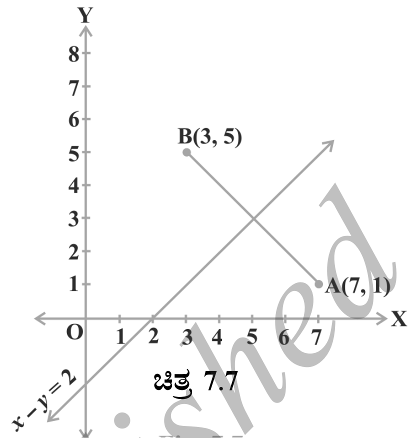
ಅಂದರೆ, $$(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$$

ಅಂದರೆ, $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

ಅಂದರೆ, $$x - y = 2$$

ಇದು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಸಂಬಂಧ.

ಸೂಚನೆ: $x - y = 2$ ಸಮೀಕರಣದ ನಕ್ಷೆಯು ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಬಿಂದುವು ABಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕದ ಮೇಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಯಿಂದ ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $x - y = 2$ ರ ನಕ್ಷೆಯು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕವಾಗಿದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.7 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ)



ಚಿತ್ರ 7.7

ಉದಾಹರಣೆ 5: A (6, 5) ಮತ್ತು B (–4, 3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: y – ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಒಂದು ಬಿಂದುವು (0, y) ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತು. P (0, y) ಯು A ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$(6 - 0)^2 + (5 - y)^2 = (-4 - 0)^2 + (3 - y)^2$$

ಅಂದರೆ, $36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$

ಅಂದರೆ, $4y = 36$

ಅಂದರೆ, $y = 9$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು (0, 9).

ನಮ್ಮ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ : $AP = \sqrt{(6 - 0)^2 + (5 - 9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

ಸೂಚನೆ: ಮೇಲಿನ ಹಂತಗಳಿಂದ y – ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು AB ಯ ಲಂಬಾರ್ಧಕಗಳ ಛೇದನವು (0, 9) ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳ ಜೋಡಿಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

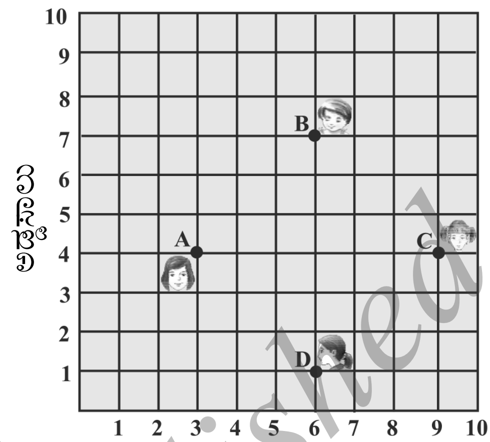
   i) (2, 3), (4, 1) ii) (–5, 7), (–1, 3) iii) (a, b), (-a, -b)

2. (0, 0) ಮತ್ತು (36, 15) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನಿಮಗೀಗ, ವಿಭಾಗ 7.2 ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾದ A ಮತ್ತು B ನಗರಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆ?

3. (1, 5), (2, 3) ಮತ್ತು (–2, –11) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವೇ ಎಂದು ನಿರ್ಣಯಿಸಿ.

4. (5, −2), (6, 4) ಮತ್ತು (7, −2) ಒಂದು ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

5. ಒಂದು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಮಂದಿ ಗೆಳತಿಯರು ಚಿತ್ರ 7.8 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ A, B, C ಮತ್ತು D ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಕುಳಿತಿರುತ್ತಾರೆ. ಚಂಪಾ ಮತ್ತು ಚಮೇಲಿ ತರಗತಿಯೊಳಕ್ಕೆ ಬರುತ್ತಾರೆ. ಕೆಲವು ನಿಮಿಷ ಅವರನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ ಬಳಿಕ ಚಂಪಾ ಚಮೇಲಿಯಲ್ಲಿ ಕೇಳುತ್ತಾಳೆ. “ABCD ಒಂದು ಚೌಕವೆಂದು ನಿನಗೆ ಅನಿಸುತ್ತಿಲ್ಲವೆ?" ಎಂದು. ಚಮೇಲಿ ಒಪ್ಪುವುದಿಲ್ಲ. ದೂರಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಅವರಿಬ್ಬರಲ್ಲಿ ಯಾರು ಸರಿ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.8

6. ಕೆಳಗಿನ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜಗಳು ಉಂಟಾಗುವುದಾದರೆ, ಉಂಟಾದ ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಧವನ್ನು ಹೆಸರಿಸಿ ಮತ್ತು ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರಕ್ಕೆ ಕಾರಣವನ್ನು ಕೊಡಿರಿ.

   i) (−1, −2), (1, 0), (−1, 2), (−3, 0)

   ii) (−3, 5), (3, 1), (0, 3), (−1, −4)

   iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. (2, −5) ಮತ್ತು (−2, 9) ರಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿರುವ x– ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿನ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

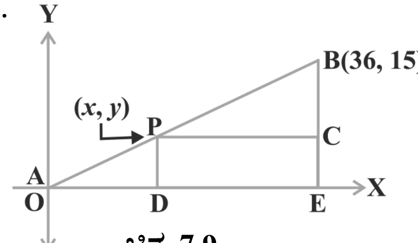
8. P (2, −3) ಮತ್ತು Q (10, y) ಬಿಂದುಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರ 10 ಮಾನಗಳಾದರೆ, y ಯ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. Q (0, 1) ಬಿಂದುವು P (5, −3) ಮತ್ತು R (x, 6) ರಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. QR ಮತ್ತು PR ದೂರಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. (x, y) ಬಿಂದುವು (3, 6) ಮತ್ತು (−3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಸಮಾನ ದೂರದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7.3 ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ

ವಿಭಾಗ 7.2ರ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಒಂದು ದೂರವಾಣಿ ಸಂಸ್ಥೆಯು A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವೆ P ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಸಾರ



ಚಿತ್ರ 7.9

ಗೋಪುರ (ಟವರ್)ವನ್ನು ಹಾಕಲು ಬಯಸುತ್ತದೆ. ಟವರ್‌ಗೆ B ಯಿಂದ ಇರುವ ದೂರವು A ಯಿಂದ ಇರುವ ದೂರದ ಎರಡು ಪಟ್ಟು ಆಗಿರಬೇಕು. P ಯು AB ಯ ಮೇಲಿದ್ದರೆ, ಅದು AB ಯನ್ನು 1:2 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. (ಚಿತ್ರ 7.9 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.) ನಾವು A ಯನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದು 'O' ಎಂದು ಮತ್ತು 1 km ನ್ನು ಎರಡೂ ಅಕ್ಷಗಳ ಮೇಲೆ 1 ಮಾನವೆಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, B ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (36, 15) ಎಂದಾಗುತ್ತವೆ. ಟವರ್‌ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ನಮಗೆ ಗೊತ್ತಿರಬೇಕು. ಈ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಹೇಗೆ?

P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (x, y) ಆಗಿರಲಿ $PD \perp x-$ ಅಕ್ಷ ಮತ್ತು $BE \perp x-$ ಅಕ್ಷ ಹಾಗೂ $PC \perp BE$ ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ 6ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ ಕೋನ ಕೋನ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದಿಂದ ΔPOD ಮತ್ತು ΔBPC ಗಳು ಸಮರೂಪಿಗಳಾಗುತ್ತವೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$, ಮತ್ತು $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$

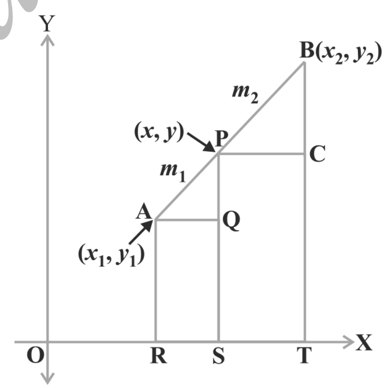
$$\frac{x}{36 - x} = \frac{1}{2} \text{ ಮತ್ತು } \frac{y}{15 - y} = \frac{1}{2}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳಿಂದ ಸಿಗುವುದೆಂದರೆ, $x = 12$ ಮತ್ತು $y = 5$

OP : PB = 1:2 ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಗೆ P (12, 5) ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ.

$A(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಮತ್ತು $P(x, y)$ ಯು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ಭಾವಿಸಿ. ಅಂದರೆ $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ (ಚಿತ್ರ 7.10 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.)



ಚಿತ್ರ 7.10

$x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ AR, RS ಮತ್ತು BT ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. $x-$ ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿ AQ ಮತ್ತು PC ಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ಆಗ ಕೋನ ಕೋನ ಸಮರೂಪತೆಯ ನಿರ್ಧಾರಕ ಗುಣದಿಂದ

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \quad (1)$$

ಈಗ, $$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$

$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ಈ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು (1) ರಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}, \quad x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ, $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ A (x_1, y_1) ಮತ್ತು B (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ, $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ P (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು.

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \quad \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

ಇದನ್ನು **ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರ** ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

A, P ಮತ್ತು B ಗಳಿಂದ y– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಲಂಬಗಳನ್ನೆಳೆದು ಆ ಬಳಿಕ ಈ ಮೇಲಿನಂತೆ ಮುಂದುವರಿದರೆ ಕೂಡಾ ಸೂತ್ರವನ್ನು ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿ ಮಾಡಬಹುದು.

P ಯು AB ಯನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವ ಅನುಪಾತ k : 1 ಆದರೆ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k + 1}, \frac{ky_2 + y_1}{k + 1}\right)$$

ವಿಶೇಷ ಪ್ರಕರಣ: ಒಂದು ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವು ಆ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 1 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ, ಆದ್ದರಿಂದ A (x_1, y_1) ಮತ್ತು B (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದು P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು,

$$\left(\frac{1.x_1 + 1.x_2}{1 + 1}, \quad \frac{1.y_1 + 1.y_2}{1 + 1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಕೆಲವೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: (4, –3) ಮತ್ತು (8, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 3 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: P (x, y)ಯು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಬಿಂದು (7, 3).

ಉದಾಹರಣೆ 7: A (–6, 10) ಮತ್ತು B (3, –8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು (–4, 6) ಬಿಂದುವು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ?

ಪರಿಹಾರ: (–4, 6) AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲಿ. ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$(-4,\ 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \quad (1)$$

$(x, y) = (a, b)$ ಆದರೆ, $x = a$, $y = b$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ

ಆದ್ದರಿಂದ, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2} \text{ ಮತ್ತು } 6 = \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$$

ಈಗ, $$-4 = \frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$$

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

ಅಂದರೆ, $$7m_1 = 2m_2$$

ಅಂದರೆ, $$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

ಅನುಪಾತವು y – ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೂ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಈಗ $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\frac{m_1}{m_2} + 10}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$ (ಎಲ್ಲಾ ಪದಗಳಿಗೂ m_2 ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

ಆದ್ದರಿಂದ (–4, 6) ಬಿಂದುವು. A (–6 10) ಮತ್ತು B (3, –8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 7 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಪರ್ಯಾಯವಾಗಿ: $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತವನ್ನು $\frac{m_1}{m_2} : 1$ ಅಥವಾ $k : 1$ ಎಂದು ಕೂಡಾ ಬರೆಯಬಹುದು. (–4, 6) AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $k : 1$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ

$$(-4,\ 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \quad (2)$$

ಆದ್ದರಿಂದ, $$-4 = \frac{3k - 6}{k + 1}$$

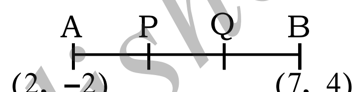
ಅಂದರೆ, $$-4k - 4 = 3k - 6$$

ಅಂದರೆ, $$7k = 2$$

ಅಂದರೆ, $k : 1 = 2 : 7$. y ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಕ್ಕೆ ಕೂಡಾ ನೀವಿದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $(-4, 6)$ ಬಿಂದುವು, $A(-6, 10)$ ಮತ್ತು $B(3, -8)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $2 : 7$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಸೂಚನೆ: ಈ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಮತ್ತೊಂದು ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನೀವು PA ಮತ್ತು PB ಗಳ ದೂರಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕಬೇಕು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕು. ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ AP ಮತ್ತು BP ಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತ ಎಂದು ತಿಳಿದಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8: $A(2, -2)$ ಮತ್ತು $B(-7, 4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ (ಅಂದರೆ, ಮೂರು ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳು) ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 7.11

ಪರಿಹಾರ: P ಮತ್ತು Q ಗಳು AB ಯ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. ಅಂದರೆ $AP = PQ = QB$ (ಚಿತ್ರ 7.11 ನ್ನು ನೋಡಿ).

ಆದ್ದರಿಂದ P ಯು AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $1 : 2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಮೂಲಕ P ಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) \text{ ಅಂದರೆ, } (-1, 0).$$

Q ಬಿಂದು ಕೂಡಾ AB ಯನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ 2:1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, Q ನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) \text{ ಅಂದರೆ, } (-4, 2).$$

ಆದ್ದರಿಂದ A ಮತ್ತು B ಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $(-1, 0)$ ಮತ್ತು $(-4, 2)$

ಸೂಚನೆ: PB ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು Q ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿ, ನಾವು Q ವನ್ನು ಕೂಡಾ ಪಡೆಯಬಹುದು. ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ನಮಗೆ ಅದರ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $(5, -6)$ ಮತ್ತು $(-1, -4)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು $y-$ ಅಕ್ಷವು ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಛೇದಕ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಅನುಪಾತವು $k : 1$ ಆಗಿರಲಿ. ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರದಿಂದ AB ಯನ್ನು $k : 1$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right)$

ಈ ಬಿಂದುವು $y-$ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲಿದೆ. $y-$ ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪಾದ ಸೂಚಕ ಸೊನ್ನೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $k = 5$

ಅಂದರೆ, ಅನುಪಾತವು 5 : 1, k = 5 ಎಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಹಾಕಿದಾಗ, ಛೇದಕ ಬಿಂದುವು $(0, \frac{-13}{3})$ ಎಂದು ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) ಮತ್ತು D (p, 3) ಬಿಂದುಗಳು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, p ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಅರ್ಧಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, AC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು = BD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು.

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$

ಅಂದರೆ, $\left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{15}{2} = \left(\frac{8+p}{2}\right)$

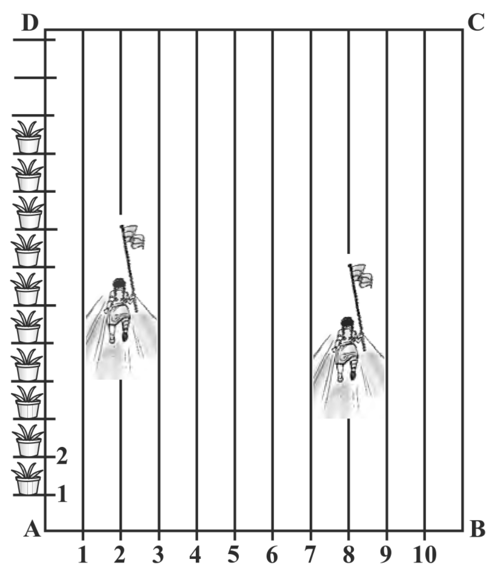
ಅಂದರೆ, $p = 7$

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. (–1, 7) ಮತ್ತು (4, –3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 2 : 3 ರ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2. (4, –1) ಮತ್ತು (–2, –3) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ತ್ರೈಭಾಜಕ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ಕ್ರೀಡಾದಿನದ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನಡೆಸಲು, ಆಯತಾಕಾರದ ನಿಮ್ಮ ಶಾಲಾ ಮೈದಾನ ABCD ಯಲ್ಲಿ, 1m ಅಂತರದಲ್ಲಿ ಸೀಮೆಸುಣ್ಣದ ಪುಡಿಯಿಂದ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ. AD ಯ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಪರಸ್ಪರ 1m ಅಂತರದಲ್ಲಿ 100 ಹೂವಿನ ಕುಂಡಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 7.12 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಇರಿಸಲಾಗಿದೆ. ನಿಹಾರಿಕಾಳು



ಚಿತ್ರ 7.12

AD ಯ $\frac{1}{4}$ ರಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು ಓಡಿ, 2ನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಹಸಿರು ಬಾವುಟವನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾಳೆ. ಪ್ರೀತ್ AD ಯ $\frac{1}{5}$ ರಷ್ಟು ದೂರವನ್ನು 8ನೇ ಗೆರೆಯಲ್ಲಿ ಓಡಿ, ಕೆಂಪು ಬಾವುಟವನ್ನು ನೆಡುತ್ತಾಳೆ. ಎರಡು ಬಾವುಟಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರವೆಷ್ಟು? ರಶ್ಮಿಯು, ಈ ಇಬ್ಬರ ಬಾವುಟಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ಬಾವುಟವನ್ನು ನೆಡಬೇಕೆಂದಾದರೆ, ಅವಳು ತನ್ನ ಬಾವುಟವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ನೆಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ?

4. (–3, 10) ಮತ್ತು (6, –8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು (–1, 6) ರಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. A (1, –5) ಮತ್ತು B (–4, 5) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವು x– ಅಕ್ಷದಿಂದ ಯಾವ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವಿಭಾಗಿಸುವ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೂಡಾ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

6. (1, 2), (4, y), (x, 6) ಮತ್ತು (3, 5) ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳಾದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

7. AB ವ್ಯಾಸವಾಗಿರುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರ (2, –3) ಮತ್ತು B ಯು (1, 4) ಆದರೆ, A ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. A ಮತ್ತು B ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ (–2, –2) ಮತ್ತು (2, –4) ಆಗಿದ್ದು $AP = \frac{3}{7}AB$ ಆಗುವಂತೆ ರೇಖಾಖಂಡ AB ಯ ಮೇಲೆ ಇರುವ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. A (–2, 2) ಮತ್ತು B (2, 8) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು 4 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುವ ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

10. ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳು (3, 0), (4, 5), (–1, 4) ಮತ್ತು (–2,–1) ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

    [**ಸುಳುಹು:** ವಜ್ರಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = $\frac{1}{2}$(ಕರ್ಣಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ)]

7.4 ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

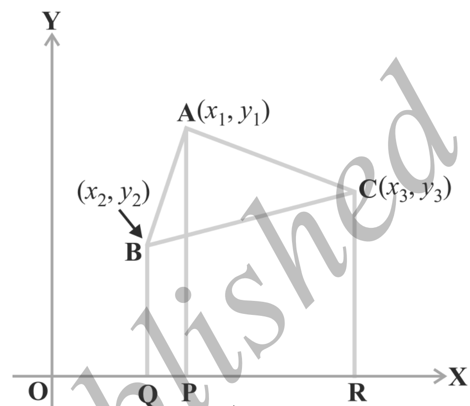
ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಪಾದ ಮತ್ತು ಅನುರೂಪ ಎತ್ತರ (ಲಂಬೋನ್ನತಿ) ಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ. ಅಲ್ಲಿ ನೀವು ಉಪಯೋಗಿಸಿದ ಸೂತ್ರವೆಂದರೆ:

$$\textbf{ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ} = \frac{1}{2} \times \textbf{ಪಾದ} \times \textbf{ಎತ್ತರ}$$

IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಕೂಡಾ

ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈಗ, ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕೊಟ್ಟಾಗ, ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ? ದೂರಸೂತ್ರದ ಸಹಾಯದಿಂದ, ಮೂರು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ನಂತರ ಹೆರಾನ್‌ನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. ವಿಶೇಷವಾಗಿ, ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ ಈ ವಿಧಾನವು ತ್ರಾಸದಾಯಕವಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನಾವುದಾದರೂ ಸುಲಭದ ವಿಧಾನವಿದೆಯೇ ಎಂದು ನಾವು ನೋಡೋಣ.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ಮತ್ತು $C(x_3, y_3)$ ಶೃಂಗಗಳಾಗಿರುವಂತೆ ABC ಯು ತ್ರಿಭುಜವಾಗಿರಲಿ. A, B ಮತ್ತು C ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿಂದ x– ಅಕ್ಷಕ್ಕೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ AP, BQ ಮತ್ತು CR ಲಂಬಗಳನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. ABQP, APRC ಮತ್ತು BQRC ಗಳು ಖಚಿತವಾಗಿ ತ್ರಾಪಿಜ್ಯಗಳಾಗಿವೆ. (ಚಿತ್ರ 7.13 ನ್ನು ನೋಡಿರಿ.)



ಚಿತ್ರ 7.13

ಈಗ, ಈ ಚಿತ್ರ 7.13 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದೇನೆಂದರೆ,

ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ ABQP ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ + ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ APRC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ – ತ್ರಾಪಿಜ್ಯ BQRC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ

ನಿಮಗೆ ತಿಳಿದಿರುವ ಪ್ರಕಾರ,

ತ್ರಾಪಿಜ್ಯದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ= $\frac{1}{2}$(ಸಮಾಂತರ ಬಾಹುಗಳ ಮೊತ್ತ)(ಅವುಗಳ ನಡುವಿನ ಅಂತರ)

ಆದ್ದರಿಂದ

ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}(BQ+AP)QP + \frac{1}{2}(AP+CR)PR - \frac{1}{2}(BQ+CR)QR$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಕೆಳಗಿನ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ:

$$\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ಈ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದಾದ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು (1, –1), (–4, 6) ಮತ್ತು (–3, –5) ಆಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: A (1, –1), B(–4, 6) ಮತ್ತು C (–3, –5) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು, ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರದ ಪ್ರಕಾರ,

$$\frac{1}{2}\ [1\ (6 + 5) + (-4)\ (-5 + 1) + (3)\ (-1-6)]$$

$$= \frac{1}{2}\ (11 + 16 + 21) = 24$$

ಆದ್ದರಿಂದ, ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 24 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 12: A (5, 2), B (4, 7) ಮತ್ತು C (7, –4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: A (5, 2), B (4, 7) ಮತ್ತು C (7, –4) ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2}\ [5\ (7 + 4) + 4\ (-4 - 2) + 7\ (2 - 7)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [55 - 24 - 35] = \frac{-4}{2} = -2$$

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಋಣಾತ್ಮಕವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ನಾವು –2 ರ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಅಂದರೆ 2 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 2 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಉದಾಹರಣೆ 13: P (–1.5, 3), Q (6, –2) ಮತ್ತು R (–3, 4) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು,

$$\frac{1}{2}\ [1.5\ (-2-4) + 6\ (4 - 3) + (-3)\ (3 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [9 + 6 - 15] = 0$$

ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಚದರ ಮಾನಗಳಾಗಿರುವ ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜವಿರಲು ಸಾಧ್ಯವೇ? ಇದರ ಅರ್ಥವೇನು?

ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಚದರ ಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿರಲೇಬೇಕು.

ಉದಾಹರಣೆ 14: A (2, 3), B (4, k) ಮತ್ತು C (6, –3) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅವುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು 0 ಯಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅಂದರೆ,

$$\frac{1}{2}\ [2\ (k + 3) + 4\ (-3 - 2) + 6\ (3 - k)] = 0$$

ಅಂದರೆ, $\frac{1}{2}(-4k) = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ $k = 0$

ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ.

ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[2(0+3)+4(-3-3)+6(3-0)] = 0$

ಉದಾಹರಣೆ 15: A (–5, 7), B (–4, –5) C (–1, –6) ಮತ್ತು D (4, 5) ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾದರೆ, ABCD ಚತುರ್ಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: B ಯನ್ನು D ಗೆ ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ, ನಿಮಗೆ ABD ಮತ್ತು BCD ಗಳೆಂಬ ಎರಡು ತ್ರಿಭುಜಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

ಈಗ, ΔABD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[-5(-5-5)+(-4)(5-7)+4(7+5)]$

$= \frac{1}{2}[50+8+48] = \frac{106}{2} = 53$ ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಹಾಗೂ, ΔBCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ $= \frac{1}{2}[-4(-6-5)-1(5+5)+4(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}[44-10+4] = 19$ ಚದರ ಮಾನಗಳು

ಆದ್ದರಿಂದ, ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ = 53 + 19 = 72 ಚದರ ಮಾನಗಳು.

ಸೂಚನೆ: ಒಂದು ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು, ನಾವದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ ಉಂಟಾಗದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ವಲಯಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ವಲಯಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕೂಡುವ ಮೂಲಕ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. ಶೃಂಗಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರುವ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

   i) (2, 3), (–1, 0), (2, –4) ii) (–5, –1), (3, –5) (5, 2)

2. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ, ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   i) (7, –2), (5, 1), (3, k) ii) (8, 1), (k, –4) (2, –5)

3. (0, –1), (2, 1) ಮತ್ತು (0, 3) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಭುಜದ ಬಾಹುಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದಾಗ ಉಂಟಾಗುವ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ತ್ರಿಭುಜ ಮತ್ತು ದತ್ತ ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜದ ಅನುಕ್ರಮ ಶೃಂಗಗಳು (–4, –2), (–3, –5), (3, –2) ಮತ್ತು (2, 3) ಆದರೆ ಅದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. IX ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ (ಅಧ್ಯಾಯ 9, ಉದಾಹರಣೆ 3) ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು ಅದನ್ನು ಎರಡು ಸಮ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದ ತ್ರಿಭುಜಗಳನ್ನಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆಂದು ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಇದನ್ನು A(4,–6), B (3, –2) ಮತ್ತು C (5, 2) ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುವ ΔABC ಯಲ್ಲಿ ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

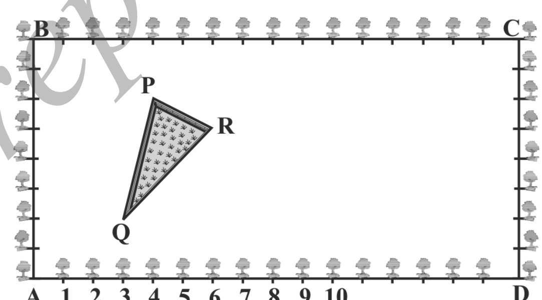
1. $2x + y - 4 = 0$ ಎಂಬ ರೇಖೆಯು A (2, –2) ಮತ್ತು B (3, 7) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ವಿಭಾಗಿಸುವ ಅನುಪಾತವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ.

2. (x, y), (1, 2) ಮತ್ತು (7, 0) ಬಿಂದುಗಳು ಸರಳರೇಖಾಗತವಾಗಿದ್ದರೆ, x ಮತ್ತು y ಗಳ ನಡುವೆ ಒಂದು ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. (6, –6), (3, –7) ಮತ್ತು (3, 3) ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳ ಮೂಲಕ ಹಾದುಹೋಗುವ ವೃತ್ತದ ಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

4. ಒಂದು ಚೌಕದ ಎರಡು ಅಭಿಮುಖ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (–1, 2) ಮತ್ತು (3, 2) ಆಗಿವೆ. ಉಳಿದೆರಡು ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. ಕೃಷ್ಣನಗರದ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲೆಯೊಂದರ X ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಹೊದೋಟವನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಾಗಿ ಆಯತಾಕಾರದ ಜಮೀನನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಜಮೀನಿನ ಸೀಮಾರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಗುಲ್‌ಮೊಹರ್‌ನ ಸಸಿಗಳನ್ನು 1m ಅಂತರದಲ್ಲಿ ನೆಡಲಾಗಿದೆ. ಜಮೀನಿನ ಒಳಭಾಗದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರ 7.14 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ತ್ರಿಭುಜಾಕಾರದ ಒಂದು ಹುಲ್ಲು ಹಾಸು ಇದೆ. ಜಮೀನಿನ ಉಳಿದ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೂ ಗಿಡಗಳ ಬೀಜಗಳನ್ನು ಬಿತ್ತಬೇಕಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ 7.14

i) A ಯನ್ನು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ii) C ಯು ಮೂಲಬಿಂದುವೆಂದು ΔPQR ನ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, ತ್ರಿಭುಜಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?

6. ΔABC ಯ ಶೃಂಗ ಬಿಂದುಗಳು A (4, 6), B (1, 5) ಮತ್ತು C (7, 2). AB ಮತ್ತು AC ಬಾಹುಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ D ಮತ್ತು E ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ ಒಂದು ರೇಖೆಯನ್ನು ಎಳೆಯಲಾಗಿದೆ, ಹೇಗೆಂದರೆ, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$. ΔADE ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು

ΔABC ಯ ವಿಸ್ತೀರ್ಣದೊಂದಿಗೆ ಹೋಲಿಸಿರಿ. (ಪ್ರಮೇಯ 6.2 ಮತ್ತು ಪ್ರಮೇಯ 6.6 ನ್ನು ನೆನಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.)

7. A (4, 2), B (6, 5) ಮತ್ತು C (1, 4) ಇವುಗಳು ΔABC ಯ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.

   i) A ಯಿಂದ ಎಳೆದ ಮಧ್ಯರೇಖೆಯು BC ಯನ್ನು D ಯಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. D ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   ii) AP : PD = 2 : 1 ಆಗುವಂತೆ, AD ಯ ಮೇಲೆ ಇರುವ P ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   iii) BQ : QE = 2 : 1 ಮತ್ತು CR : RF = 2 : 1 ಆಗುವಂತೆ, BE ಮತ್ತು CF ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳ ಮೇಲೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಇರುವ Q ಮತ್ತು R ಬಿಂದುಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   iv) ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?

   [**ಸೂಚನೆ:** ಎಲ್ಲಾ ಮೂರು ಮಧ್ಯರೇಖೆಗಳಿಗೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವ ಬಿಂದುವನ್ನು 'ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರ' ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಮಧ್ಯರೇಖೆಯನ್ನು 2 : 1 ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.]

   v) A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ಮತ್ತು C (x_3, y_3) ಗಳು ΔABC ಯ ಶೃಂಗಬಿಂದುಗಳಾದರೆ ತ್ರಿಭುಜದ ಗುರುತ್ವಕೇಂದ್ರದ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

8. ABCD ಯು A (–1, 1), B (–1, 4), C (5, 4) ಮತ್ತು D (5, –1) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ಒಂದು ಆಯತ. P, Q, R ಮತ್ತು S ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ, AB, BC, CD ಮತ್ತು DA ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳು. ಚತುರ್ಭುಜ ABCD ಯು ಒಂದು ವರ್ಗವೆ? ಒಂದು ಆಯತವೇ? ಅಥವಾ ಒಂದು ವಜ್ರಾಕೃತಿಯೇ? ನಿಮ್ಮ ಉತ್ತರವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿ.

7.5 ಸಾರಾಂಶ

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ, ನೀವು ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. P (x_1, y_1) ಮತ್ತು Q (x_2, y_2) ಗಳ ನಡುವಿನ ದೂರವು $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. P (x, y) ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಮೂಲಬಿಂದುವಿಗಿರುವ ದೂರವು $\sqrt{x^2 + y^2}$

3. A (x_1, y_1), ಮತ್ತು B (x_2, y_2) ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $m_1 : m_2$ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ P (x, y) ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \ \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

ಈ ಅಭ್ಯಾಸಗಳು ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಕೋನದಿಂದಲ್ಲ.

4. $P(x_1, y_1)$ ಮತ್ತು $Q(x_2, y_2)$ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡದ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

5. (x_1, y_1), (x_2, y_2) ಮತ್ತು (x_3, y_3) ಬಿಂದುಗಳಿಂದ ಉಂಟಾದ ತ್ರಿಭುಜದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು

$$\frac{1}{2}\ [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

ಎಂಬ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಯ ಪರಿಮಾಣಾತ್ಮಕ ಬೆಲೆಯಾಗಿದೆ.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

ವಿಭಾಗ 7.3 ರಲ್ಲಿ $A(x_1, y_1)$, ಮತ್ತು $B(x_2, y_2)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು ಆಂತರಿಕವಾಗಿ $m_1 : m_2$ ಎಂಬ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗಿಸುವ $P(x, y)$ ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿವೆ:

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}\ ,\ y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

ಎಂಬುದಾಗಿ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $PA : PB = m_1 : m_2$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, P ಯು A ಮತ್ತು B ಗಳ ನಡುವೆ ಇಲ್ಲದೆ AB ರೇಖಾಖಂಡದ ಹೊರಗೆ $PA : PB = m_1 : m_2$ ಆಗುವಂತೆ AB ಸರಳ ರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಇದ್ದರೆ, A ಮತ್ತು B ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖಾಖಂಡವನ್ನು P ಯು ಬಾಹ್ಯವಾಗಿ ವಿಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಇಂತಹ ಪ್ರಕರಣಕ್ಕೆ ಭಾಗ ಪ್ರಮಾಣ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನೀವು ಉನ್ನತ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿಯುತ್ತೀರಿ.

❀ ❀ ❀

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು 8

8.1 ಪೀಠಿಕೆ

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ, ನೀವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯಾ ಪ್ರಪಂಚದ ನಿಮ್ಮ ಅನ್ವೇಷಣೆಯನ್ನು ಆರಂಭಿಸಿದ್ದೀರಿ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅವಲೋಕಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲಿನ ನಮ್ಮ ಚರ್ಚೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಾವು ವಿಭಾಗ 8.2 ಮತ್ತು 8.3ನ್ನು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಎರಡು ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳಾದ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ (algorithm) ಮತ್ತು ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯಗಳಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು, ಅದರ ಹೆಸರೇ ಸೂಚಿಸುವಂತೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾಗಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ್ದಾಗಿದೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಯನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ b ಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಉಳಿಯುವ ಶೇಷ r ಎಂಬುದು, ಯಾವಾಗಲೂ ಭಾಜಕ b ಗಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಬಹುಶಃ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಹಲವರು ಇದನ್ನು ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸುವ ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ಗುರುತಿಸಿರಬಹುದು. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ನಿರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಅರ್ಥೈಸಲು ಸುಲಭವಾದರೂ ಸಹ, ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಭಾಗಾಕಾರದ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ ಇದರ ಅನೇಕ ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ನಾವು ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಮುಖ್ಯವಾಗಿ ಇದನ್ನು ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ ವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಮತ್ತೊಂದೆಡೆ, ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಾಕಾರಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ. ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅನನ್ಯವಾಗಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಈಗಾಗಲೇ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಈ ಮುಖ್ಯವಾದ ಸತ್ಯ ಸಂಗತಿಯೇ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವಾಗಿದೆ. ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ನಿರೂಪಿಸಲು ಮತ್ತು ಅರ್ಥೈಸಲು ಸುಲಭವಾದರೂ ಸಹ ಗಣಿತ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ಇದರ ಆಳವಾದ ಮತ್ತು ಗಣನೀಯವಾದ ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಎರಡು ಮುಖ್ಯವಾದ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಮೊದಲನೆಯದಾಗಿ, ನೀವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿರುವಂತಹ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಮತ್ತು $\sqrt{5}$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸಲು ಇದನ್ನು ನಾವು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ಎರಡನೆಯದಾಗಿ, ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅಂದರೆ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ರೂಪದ ಸಂಖ್ಯೆಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಯಾವಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಯಾವಾಗ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ನಾವು ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $\frac{p}{q}$ ದ ಛೇದವಾದ qದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ನಾವು ಇದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು. qದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು $\frac{p}{q}$ ದ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ಸ್ವಭಾವವನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ತೆರೆದಿಡುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ನಮ್ಮ ಅನ್ವೇಷಣೆಯನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ.

8.2 ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ

ಕೆಳಗಿನ ಜನಪದ ಒಗಟನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ

ಒಬ್ಬ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ರಸ್ತೆಯುದ್ದಕ್ಕೂ ಮೊಟ್ಟೆಗಳನ್ನು ಮಾರುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತಿದ್ದನು. ಆಗ ಸೋಮಾರಿ ದಾರಿಹೋಕನೊಬ್ಬ ಆತನೊಡನೆ ಮಾತನಾಡುತ್ತಿರುವಾಗ, ಅವರಿಬ್ಬರ ಮಾತುಕತೆಯು ಕಲಹಕ್ಕೆ ತಿರುಗಿತು. ದಾರಿಹೋಕನು ಮೊಟ್ಟೆಗಳಿದ್ದ ಬುಟ್ಟಿಯನ್ನು ಎಳೆದು ನೆಲಕ್ಕೆ ಎಸೆದನು. ಕೆಲವು ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ಒಡೆದವು. ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ನ್ಯಾಯ ಪಂಚಾಯತದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥನಲ್ಲಿ ಒಡೆದು ಹೋದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ದಾರಿಹೋಕನಿಂದ ಕೊಡಿಸುವಂತೆ ವಿನಂತಿಸಿದನು. ಮುಖ್ಯಸ್ಥನು 'ಒಡೆದುಹೋದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳೆಷ್ಟು?' ಎಂದು ಪ್ರಶ್ನಿಸಿದನು. ಆಗ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಿಸಿದನು:

ಎರಡರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ;
ಮೂರರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಎರಡು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ;
ನಾಲ್ಕರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಮೂರು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ;
ಐದರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ನಾಲ್ಕು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ;
ಆರರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಐದು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ;
ಏಳರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಏನೂ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ.
ನನ್ನ ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿ 150 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೊಟ್ಟೆಗಳು ಹಿಡಿಯುವುದಿಲ್ಲ.

ಹಾಗಾದರೆ, ಆ ಬುಟ್ಟಿಯಲ್ಲಿದ್ದ ಮೊಟ್ಟೆಗಳೆಷ್ಟು? ಈಗ ಈ ಒಗಟನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಈಗ, ಒಟ್ಟು ಮೊಟ್ಟೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ a ಆಗಿರಲಿ. ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಹಿಮ್ಮುಖವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದಾಗ $a \leq 150$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಏಳರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಏನೂ ಉಳಿಯುವುದಿಲ್ಲ. ಇದನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ $a = 7p + 0$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ p ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ($p \in \mathrm{N}$)

ಆರರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ, $a=6q+5$ ಇಲ್ಲಿ q ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ($q \in \mathrm{N}$)

ಐದರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ನಾಲ್ಕು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. $a = 5w + 4$ ಇಲ್ಲಿ w ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ($w \in \mathrm{N}$)

ನಾಲ್ಕರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಮೂರು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. $a = 4s + 3$ ಇಲ್ಲಿ s ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ($s \in \mathrm{N}$)

ಮೂರರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಎರಡು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. $a = 3t + 2$ ಇಲ್ಲಿ t ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ($t \in \mathrm{N}$)

ಎರಡರಂತೆ ಎಣಿಸಿದರೆ ಒಂದು ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. $a = 2u + 1$ ಇಲ್ಲಿ u ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ. ($u \in \mathrm{N}$)

---

* ಇದು ಎ. ರಾಮ್‌ಪಾಲ್ ಮತ್ತು ಇತರರು ಬರೆದ 'ನ್ಯೂಮರಸಿ ಕೌಂಟ್ಸ್!' (Numeracy Counts!) ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿನ ಒಗಟಿನ ಮಾರ್ಪಡಿಸಿದ ರೂಪ.

ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ b ಯು (ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ b ಯ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 7,6,5,4,3 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿವೆ) a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸಿ b ಗಿಂತ ಚಿಕ್ಕದಾದ r ಎಂಬ ಶೇಷವನ್ನು ಉಳಿಸುತ್ತದೆ ($r<b$, ಇಲ್ಲಿ r ದ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 0, 5, 4, 3, 2 ಮತ್ತು 1 ಆಗಿವೆ). ಇಂತಹ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬರೆಯುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ನಾವು ಪ್ರಮೇಯ 8.1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪುನಃ ನಮ್ಮ ಒಗಟಿಗೆ ಹಿಂದಿರುಗಿದರೆ, ಅದನ್ನು ಹೇಗೆ ಬಿಡಿಸಬೇಕೆಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಮಾರ್ಗೋಪಾಯವಿದೆಯೇ? ಹೌದು! ಎಲ್ಲಾ ನಿಬಂಧನೆಗಳಿಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವ 7ರ ಅಪವರ್ತ್ಯಗಳನ್ನು ನೀವು ಹುಡುಕಬೇಕಾಗಿದೆ. ನಿರಂತರ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದ (ಲ.ಸಾ.ಅ ದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ) ಅವನ ಬಳಿ 119 ಮೊಟ್ಟೆಗಳಿದ್ದವೆಂದು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದು.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅರಿಯಲು, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಜೋಡಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

17, 6; 5, 12; 20, 4

ನಾವು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಇಂತಹ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆಗೂ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬರೆಯಬಹುದು.

$17 = 6 \times 2 + 5$ (17ನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಶೇಷಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 2 ಮತ್ತು 5 ಆಗಿವೆ.)

$5 = 12 \times 0 + 5$ ($12 > 5$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂಬಂಧವು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (20 ನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಟ್ಟು ಭಾಗಲಬ್ಧ '5' ಮತ್ತು ಶೇಷ '0' ಆಗಿದೆ.) ಅಂದರೆ a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಜೊತೆ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ಆಗುವಂತೆ p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ನೋಡಿದ್ದೇವೆ. q ಅಥವಾ r ದ ಬೆಲೆಗಳು ಸೊನ್ನೆಯೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು **ಗಮನಿಸಿ.**

ಈಗ ಈ ಕೆಳಗಿನ a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನೀವು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಬಹುದಲ್ಲವೇ?

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ q ಮತ್ತು r ಗಳು ಅನನ್ಯವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ್ದೀರಾ? ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು ಮಾತ್ರ $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ಎಂಬ ನಿಬಂಧನೆಯನ್ನು ಪೂರೈಸುತ್ತವೆ. ಇದು ನೀವು ಈವರೆಗೆ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯ ಪುನರ್ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ ಹಾಗೂ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ q ಮತ್ತು r ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಭಾಗಲಬ್ಧ (*quotient*) ಮತ್ತು ಶೇಷ (*remainder*)ಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ಅರಿವಾಗಿರಬಹುದು.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶದ ಔಪಚಾರಿಕ ಹೇಳಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.1 (ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ): ದತ್ತ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ, $a = bq + r$ ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ $0 \leq r < b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವು ಬಹಳ ಕಾಲದ ಹಿಂದೆಯೇ ತಿಳಿದಿದ್ದರೂ, ಪ್ರಪ್ರಥಮ ಬಾರಿಗೆ ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್ (The Elements)ನ 7ನೇ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ ಉಲ್ಲೇಖವಾಗಿದೆ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು ಈ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ.

ಕ್ರಮವಿಧಿ ಎಂಬುದು, ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಿಡಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ವಿವಿಧ ಹಂತಗಳ ಸರಣಿಯಾಗಿದೆ.

ಅಲ್ಗಾರಿಥಮ್(algorithm, ಕ್ರಮವಿಧಿ) ಎಂಬ ಪದವು 9ನೇ ಶತಮಾನದಲ್ಲಿದ್ದ ಪರ್ಷಿಯನ್ ಗಣಿತಜ್ಞರಾದ ಆಲ್ ಖ್ವಾರಿಝ್ಮಿ (al-Khwarizmi)ಯವರ ಹೆಸರಿನಿಂದ ಬಂದಿದೆ. ನಿಜವಾಗಿ 'algebra' ಎಂಬ ಪದವೂ ಸಹ ಅವರು ಬರೆದ Hisab al-jabr w'al muqabala ಎಂಬ ಪುಸ್ತಕದಿಂದ ವ್ಯುತ್ಪತ್ತಿಯಾಗಿದೆ.


Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi
(ಕ್ರಿ.ಶ 780 – 850)

ಒಂದು ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಸಾಧಿಸಲು ಪ್ರಾಥಮಿಕವಾಗಿ ಬಳಸುವ, ಈಗಾಗಲೇ ಸಾಧಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಒಂದು ಮೂಲಭೂತ ಹೇಳಿಕೆಯೇ **ಅನುಪ್ರಮೇಯ**.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ ಎಂಬುದು ಎರಡು ದತ್ತ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮಹತ್ತಮ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನ (ಮ.ಸಾ.ಅ) ವನ್ನು ಲೆಕ್ಕಾಚಾರ ಮಾಡಲು ಬಳಸುವ ಒಂದು ತಂತ್ರವಾಗಿದೆ. a ಮತ್ತು b ಎಂಬ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವು ಆ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸುವ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ d ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.

ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಬಳಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ. 455 ಮತ್ತು 42 ಈ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ದೊಡ್ಡ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದ 455 ರಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

ಈಗ ಭಾಜಕವಾದ 42 ಮತ್ತು ಶೇಷ 35ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

ಈಗ ಭಾಜಕವಾದ 35 ಮತ್ತು ಶೇಷ 7ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿದ್ದು, ನಾವು ಈ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮತ್ತೂ ಮುಂದುವರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಕೊನೆಯ ಹಂತದಲ್ಲಿನ ಭಾಜಕವಾದ 7ನ್ನೇ 455 ಮತ್ತು 42ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಆಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತೇವೆ. 455 ಮತ್ತು 42ರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದರಿಂದ ನೀವು ಇದನ್ನು ಸುಲಭವಾಗಿ ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. ಈ ವಿಧಾನವು ಏಕೆ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ? ಈ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶಗಳಿಂದ ಅದು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ನಾವು **ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ**ಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

$c > d$ ಆಗಿರುವಂತಹ c ಮತ್ತು d ಎಂಬ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1: ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು c ಮತ್ತು d ಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ, $c = dq + r$ ಆಗುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ $0 \leq r < d$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2: $r = 0$ ಆದರೆ, d ಯು c ಮತ್ತು d ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $r \neq 0$ ಆದರೆ, ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು d ಮತ್ತು r ಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ.

ಹಂತ 3: ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವತನಕ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ. ಈ ಹಂತ (ಶೂನ್ಯ ಶೇಷ) ದಲ್ಲಿನ ಭಾಜಕವು ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಮ.ಸಾ.ಅ (c,d) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (d,r) ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಮ.ಸಾ.ಅ. (c,d) ಎಂಬ ಸಂಕೇತವು c ಮತ್ತು d ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1: ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ 4052 ಮತ್ತು 12576ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:

ಹಂತ 1: $12576 > 4052$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ಹಂತ 2: ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿರದ ಕಾರಣ (ಶೇಷ 420) 4052 ಮತ್ತು 420 ಇವುಗಳಿಗೆ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ಹಂತ 3: ಈಗ ಹೊಸದಾಗಿ ದೊರೆತ ಭಾಜಕ 420 ಮತ್ತು ಶೇಷ 272 ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

ಈಗ ಹೊಸದಾಗಿ ದೊರೆತ ಭಾಜಕ 272 ಮತ್ತು ಶೇಷ 148 ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಭಾಗಾಕಾರ

ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

ಹೊಸದಾಗಿ ದೊರೆತ ಭಾಜಕ 148 ಮತ್ತು ಶೇಷ 124 ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

ಹೊಸದಾಗಿ ದೊರೆತ ಭಾಜಕ 124 ಮತ್ತು ಶೇಷ 24 ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

ಹೊಸದಾಗಿ ದೊರೆತ ಭಾಜಕ 24 ಮತ್ತು ಶೇಷ 4 ಇವುಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ಈಗ ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ನಮ್ಮ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಇಲ್ಲಿಗೆ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಭಾಜಕವು 4 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, 12576 ಮತ್ತು 4052 ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವು 4 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. 4 = ಮ.ಸಾ.ಅ. (24, 4) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (124, 24) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (148, 124) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (272, 148) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (420, 272) = ಮ. ಸಾ. ಅ. (4052, 420) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (12576, 4052) ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗವಾಗುವುದಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೇ ಒಂದು ಗಣಕಯಂತ್ರವು ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಲು ಯೋಜಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ಕ್ರಮವಿಧಿಯ ಆರಂಭಿಕ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ಇದು ಒಂದಾಗಿದೆ.

ಗಮನಿಸಿ:

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಕ್ರಮವಿಧಿಗಳು ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಎಷ್ಟು ನಿಕಟವಾಗಿ ಬೆಸೆದುಕೊಂಡಿವೆ ಎಂದರೆ ಜನರು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನೇ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

2. ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯು ಕೇವಲ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನಿರೂಪಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದ್ದರೂ, ಅದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ $(b \neq 0)$ ಎಲ್ಲಾ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೂ ವಿಸ್ತರಿಸಬಹುದು. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಈ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ನಾವು ಇಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸುವುದಿಲ್ಲ.

ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ/ಕ್ರಮವಿಧಿಯ ಹಲವಾರು ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ಇಂತಹ ಅನ್ವಯಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನಾವು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ್ದೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 2: q ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, ಪ್ರತಿ ಧನ ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $2q$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿ ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $2q + 1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: a ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $b = 2$ ಆಗಿರಲಿ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ, $a = 2q+r$, ಇಲ್ಲಿ $q \geq 0$ ಆಗಿರುವಂತಹ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಮತ್ತು $r = 0$ ಅಥವಾ $r = 1$ ಏಕೆಂದರೆ $0 \leq r < 2$ ಆದ್ದರಿಂದ, $a = 2q$ ಅಥವಾ $a = 2q+1$.

a ಯು $2q$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಆಗ a ಯು ಒಂದು ಸಮ ಪೂರ್ಣಾಂಕ. ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು ಸಮವೂ ಆಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಬೆಸವೂ ಆಗಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $2q+1$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: q ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾದಾಗ, ಯಾವುದೇ ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $4q + 1$ ಅಥವಾ $4q + 3$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: a ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $b = 4$ ಆಗಿರಲಿ. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ $0 \leq r < 4$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಶೇಷಗಳೆಂದರೆ 0, 1, 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿವೆ.

ಅಂದರೆ a ಯು $4q$ ಅಥವಾ $4q + 1$ ಅಥವಾ $4q + 2$ ಅಥವಾ $4q + 3$ ಆಗಿರಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ q ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ, ಆದಾಗ್ಯೂ a ಯ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, a ಯ ಬೆಲೆಯು $4q$ ಅಥವಾ $4q + 2$ ಆಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. (ಏಕೆಂದರೆ ಇವೆರಡೂ 2 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡುತ್ತವೆ). ಆದ್ದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $4q + 1$ ಅಥವಾ $4q + 3$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 4: ಒಬ್ಬ ಸಿಹಿತಿಂಡಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯ ಬಳಿ 420 ಕಾಜು ಬರ್ಫಿಗಳು ಮತ್ತು 130 ಬಾದಾಮಿ ಬರ್ಫಿಗಳು ಇವೆ. ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬರ್ಫಿಗಳಿರುವಂತೆ ಹಾಗೂ ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಅವು ಕನಿಷ್ಠ ಸ್ಥಳವನ್ನು ಆಕ್ರಮಿಸುವಂತೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದರಂತೆ ಪೇರಿಸಿಡಲು ಆಕೆಯು ಬಯಸುತ್ತಾಳೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬೇಕಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಬರ್ಫಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಷ್ಟು?

ಪರಿಹಾರ: ಇದನ್ನು ನಿರಂತರ ಪ್ರಯತ್ನದಿಂದ ಮಾಡಬಹುದು. ಆದರೆ ಇದನ್ನು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಮಾಡಬೇಕಾದರೆ, ನಾವು 420 ಮತ್ತು 130ರ ಮ.ಸಾ.ಅ ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ನಮಗೆ ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿರುವ ಗರಿಷ್ಠ ಬರ್ಫಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಆಗ ಗುಂಪುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಕನಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ತಟ್ಟೆಯಲ್ಲಿ ಆಕ್ರಮಿಸುವ ಸ್ಥಳವೂ ಕನಿಷ್ಠವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಬಳಸೋಣ.

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

ಹೀಗೆ, 420 ಮತ್ತು 130ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವು 10 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಸಿಹಿತಿಂಡಿಯ ವ್ಯಾಪಾರಿಯು ಎರಡೂ ರೀತಿಯ ಬರ್ಫಿಗಳ 10 ಗುಂಪುಗಳನ್ನು ಮಾಡಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿಯನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 135 ಮತ್ತು 225 (ii) 196 ಮತ್ತು 38220 (iii) 867 ಮತ್ತು 255

2. ಯಾವುದೇ ಧನ ಬೆಸ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು $6q+1$ ಅಥವಾ $6q+3$ ಅಥವಾ $6q+5$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ q ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

3. 32 ಸದಸ್ಯರುಳ್ಳ ಭೂದಳದ ತುಕಡಿಯ ಹಿಂದೆ 616 ಸದಸ್ಯರುಳ್ಳ ಭೂದಳ ಸೈನಿಕರ ಗುಂಪು ಒಂದು ಪಥ ಸಂಚಲನದಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಆ ಎರಡೂ ತಂಡಗಳು ಒಂದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಚಲಿಸಬೇಕಾಗಿದೆ. ಗರಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಕಂಬಸಾಲುಗಳಲ್ಲಿ ಅವರು ಈ ರೀತಿ ಚಲಿಸಬಹುದು?

4. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಬಳಸಿ, ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ವರ್ಗವು $3m$ ಅಥವಾ $3m+1$ ರೂಪದಲ್ಲಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ m ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕ.

   [**ಸುಳುಹು:** x ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ ಅದು $3q$, $3q+1$ ಅಥವಾ $3q+2$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಪ್ರತಿಯೊಂದನ್ನೂ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು $3m$ ಅಥವಾ $3m+1$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪುನಃ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.]

5. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವುದೇ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಘನವು $9m$, $9m+1$ ಅಥವಾ $9m+8$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

8.3 ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ:

ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $2=2$, $4=2\times2$, $253=11\times23$ ಇತ್ಯಾದಿ. ಈಗ, ನಾವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ದೆಸೆಯಲ್ಲಿ ನೋಡಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗುಣಿಸುವುದರಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೇ? ಎಂಬುದನ್ನು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

ಯಾವುದಾದರೂ ಕೆಲವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 2, 3, 7, 11 ಮತ್ತು 23. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಥವಾ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅವುಗಳನ್ನು ನಾವು ಬಯಸಿದಷ್ಟು ಬಾರಿ ಪುನರಾವರ್ತಿಸಿ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ದೊಡ್ಡ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನೇ ನಾವು ಪಡೆಯಬಹುದು (ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು).

ಈಗ ಕೆಲವನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ:

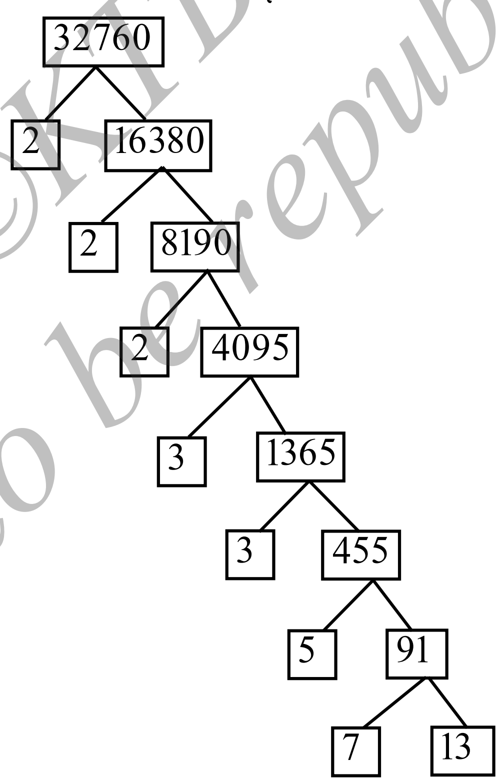
$$7 \times 11 \times 23 = 1771 \qquad 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$$

$$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626 \qquad 2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ಇತ್ಯಾದಿ

ಈಗ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಈ ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಗ್ರಹದ ಗಾತ್ರದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ಊಹಿಸುತ್ತೀರಿ? ಅದು ಕೇವಲ ಪರಿಮಿತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆಯೇ? ಅಥವಾ ಅಲ್ಲಿ ಅಪರಿಮಿತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆಯೇ? ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅಪರಿಮಿತ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎಲ್ಲ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು, ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ವಿಧಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಯೋಜಿಸಿದರೆ, ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಮತ್ತು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಅಪರಿಮಿತ ಸಂಗ್ರಹವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈಗಿರುವ ಪ್ರಶ್ನೆಯೆಂದರೆ – ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೇ? ನೀವು ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಏನನ್ನು ಯೋಚಿಸುವಿರಿ? ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಲ್ಲದ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇರಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುವಿರಾ? ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರಿಸುವ ಮೊದಲು, ಈಗ ನಾವು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ಮಾಡಿದುದರ ವಿಲೋಮ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡೋಣ.

ನಿಮಗೆಲ್ಲರಿಗೂ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವ ಅಪವರ್ತನ ವೃಕ್ಷವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ. ಈಗ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ 32760ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಅದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಅಪವರ್ತಿಸೋಣ.



ಹೀಗೆ ನಾವು 32760ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಅಂದರೆ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ಆಗುವಂತೆ ಅಪವರ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಅಂದರೆ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ಎಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಘಾತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು

ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ 123456789. ಇದನ್ನು $3^2 \times 3803 \times 3607$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದರೂ 3803 ಮತ್ತು 3607 ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕು (ನೀವು ಇದೇ ರೀತಿ ಇತರೆ ಹಲವಾರು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ). ಇದರಿಂದ ನಮಗೆ ಪ್ರತಿ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಘಾತಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು ಎಂದು ಊಹಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಈ ಹೇಳಿಕೆಯು ಸತ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ಇದನ್ನೇ **ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ** ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಅಧ್ಯಯನದಲ್ಲಿ ಇದು ಮೂಲ ನಿರ್ಣಾಯಕ ಪಾತ್ರವನ್ನು ವಹಿಸಿದೆ. ಈಗ ಈ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.2 (ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ): ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು (ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು) ಮತ್ತು ಈ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂದು ಪ್ರಚಲಿತವಾಗುವ ಮೊದಲೇ, ಪ್ರಮೇಯ 8.2ರ ಸಮಾನ ಭಾಷಾಂತರವು ಬಹುಶಃ ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ 'ದಿ ಎಲಿಮೆಂಟ್ಸ್'ನ 9ನೇ ಪುಸ್ತಕದಲ್ಲಿ 14ನೇ ಉಕ್ತಿಯಾಗಿ ಪ್ರಪ್ರಥಮವಾಗಿ ದಾಖಲಾಗಿದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಇದರ ಮೊದಲ ಸರಿಯಾದ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್ರಿಚ್ ಗಾಸ್ ಇವರು ತಮ್ಮ *Disquisitiones Arithmeticae* ದಲ್ಲಿ ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

ಕಾರ್ಲ್ ಫ್ರೆಡ್ರಿಚ್ ಗಾಸ್‌ರನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತಜ್ಞರ ರಾಜಕುಮಾರ ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ ಮತ್ತು ಆರ್ಕಿಮಿಡೀಸ್ ಹಾಗೂ ನ್ಯೂಟನ್‌ರನ್ನೊಳಗೊಂಡಂತೆ ಮೂರು ಸಾರ್ವಕಾಲಿಕ ಶ್ರೇಷ್ಠ ಗಣಿತಜ್ಞರಲ್ಲಿ ಇವರೂ ಒಬ್ಬರೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗಿದೆ. ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನಗಳೆರಡಕ್ಕೂ ಇವರು ಮೂಲಭೂತ ಕೊಡುಗೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿದ್ದಾರೆ.

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗುವಂತೆ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ ಅದು ಇನ್ನೂ ಅನೇಕ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಒಂದು **ಅನನ್ಯ** ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ದೊರೆಯುವಿಕೆಯು ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿರಬಹುದು ಎಂದು ಈ ಪ್ರಮೇಯವು ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ದತ್ತ ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಒಂದೇ ಒಂದು ವಿಧದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ನಿರ್ದಿಷ್ಟತೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ಇದು $3 \times 5 \times 7 \times 2$ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಅಥವಾ ಇನ್ಯಾವುದೇ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಬಹುದು.

ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಅನನ್ಯವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮಗಳು ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿರಬಹುದು.

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಒಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ x ನ್ನು ನಾವು $x = p_1 p_2.....p_n$ ಎಂದು ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ $p_1, p_2,.....p_n$ ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $p_1 \le p_2 \le..... \le p_n$. ನಾವು ಒಂದೇ ರೀತಿಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ಸಂಯೋಜಿಸಿದರೆ, ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಘಾತಗಳು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$$

$$= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

ಒಂದೊಮ್ಮೆ ನಾವು ಈ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ಏರಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿಯೇ ಬರೆಯಬೇಕೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಿದರೆ, ಆಗ ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವ ಏಕಮಾತ್ರ ಕ್ರಮವಿರುತ್ತದೆ.

ಗಣಿತ ಹಾಗೂ ಇತರ ಕ್ಷೇತ್ರಗಳೆರಡರಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯದ ಹಲವಾರು ಅನ್ವಯಗಳಿವೆ. ಈಗ ನಾವು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 5: 4^n ರೀತಿಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 4^n ಎಂಬುದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ, 4^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬೇಕಾದರೆ, ಅದು 5 ರಿಂದ ನಿಶ್ಶೇಷವಾಗಿ ಭಾಗಿಸಲ್ಪಡಬೇಕು. ಅಂದರೆ, 4^n ಇದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 5ನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರಬೇಕು. ಆದರೆ $4^n = (2)^{2n}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಹೀಗೆ 4^n ದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯು 2 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ 4^n ದ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬೇರೆ ಯಾವುದೇ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಇಲ್ಲದಿರುವುದು ಖಚಿತವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 4^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ ಎಂಬ ಅರಿವಿಲ್ಲದೆ, ಅದನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯ ಮೂಲಕ ಈ ವಿಧಾನವನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: 6 ಮತ್ತು 20ರ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $6 = 2^1 \times 3^1$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$$

ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಿದಂತೆ, ಮ.ಸಾ.ಅ. (6,20) = 2 ಮತ್ತು

ಲ.ಸಾ.ಅ. (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

ಸೂಚನೆ: ಮ.ಸಾ.ಅ.(6, 20) = 2^1 = **ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.**

ಲ.ಸಾ.ಅ. (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ಹೆಚ್ಚು ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪ್ರತಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ.**

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಿಂದ ನೀವು ಮ.ಸಾ.ಅ. (6, 20) × ಲ.ಸಾ.ಅ (6, 20) = 6×20 ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ **ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ, ಮ.ಸಾ.ಅ. (a, b) × ಲ.ಸಾ.ಅ (a, b) = $a \times b$** ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ತಾಳೆ ನೋಡಬಹುದು. ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ನಾವು ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಮೊದಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿದ್ದಾಗ, ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 7: 96 ಮತ್ತು 404ರ ಮ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇದರಿಂದ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: 96 ಮತ್ತು 404ನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$$96 = 2^5 \times 3$$
$$404 = 2^2 \times 101$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. = $2^2 = 4$

$$\therefore \text{ ಲ.ಸಾ.ಅ. } (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{ಮ.ಸಾ.ಅ. } (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ಉದಾಹರಣೆ 8: 6, 72 ಮತ್ತು 120 ಇವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$6 = 2 \times 3$$
$$72 = 2^3 \times 3^2$$
$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

ಇಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಚಿಕ್ಕ ಘಾತವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^1 ಮತ್ತು 3^1 ಆಗಿವೆ.

$$\therefore \text{ ಮ.ಸಾ.ಅ. } (6, 72, 120) = 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$$

ದತ್ತ ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಲ್ಲಿನ ಅತ್ಯಂತ ದೊಡ್ಡ ಘಾತವುಳ್ಳ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^3, 3^2 ಮತ್ತು 5^1 ಆಗಿವೆ.

$$\therefore \text{ ಲ.ಸಾ.ಅ. } (6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$$

ಗಮನಿಸಿ: $6 \times 72 \times 120 \neq$ ಮ.ಸಾ.ಅ.(6, 72, 120) $\times$ ಲ.ಸಾ.ಅ. (6, 72, 120). ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೂರು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಅವುಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಲ.ಸಾ.ಅ.ಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ.

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಜೋಡಿ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ. ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದು, ಲ.ಸಾ.ಅ. $\times$ ಮ.ಸಾ.ಅ. = ಆ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧ ಎಂಬುದನ್ನು ತಾಳೆ ನೋಡಿ.

   (i) 26 ಮತ್ತು 91 (ii) 510 ಮತ್ತು 92 (iii) 336 ಮತ್ತು 54.

3. ಕೆಳಗಿನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ. ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ.ಗಳನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನ ವಿಧಾನದಿಂದ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

   (i) 12, 15 ಮತ್ತು 21 (ii) 17, 23 ಮತ್ತು 29 (iii) 8, 9 ಮತ್ತು 25

4. (306, 657)ರ ಮ.ಸಾ.ಅ. = 9 ಆದರೆ ಅವುಗಳ ಲ.ಸಾ.ಅ.ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

5. n ದ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಗೆ 6^n ಇದು ಸೊನ್ನೆಯಿಂದ ಕೊನೆಗೊಳ್ಳಬಹುದೇ? ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

6. $7 \times 11 \times 13 + 13$ ಮತ್ತು $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ಇವು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಏಕೆ? ವಿವರಿಸಿ.

7. ಒಂದು ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಸುತ್ತಲೂ ವೃತ್ತಾಕಾರದ ಮಾರ್ಗವಿದೆ. ಸೋನಿಯಾಳು ಆ ಕ್ರೀಡಾಂಗಣದ ಒಂದು ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು 18 ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ರವಿಯು ಅದೇ ಸುತ್ತನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು 12 ನಿಮಿಷಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಾನೆ. ಒಂದೊಮ್ಮೆ ಅವರಿಬ್ಬರೂ ಒಂದೇ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಆರಂಭಿಸಿ, ಏಕಮುಖವಾಗಿ ಚಲಿಸಿದರೆ, ಎಷ್ಟು ನಿಮಿಷಗಳ ನಂತರ ಅವರು ಪುನಃ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತಾರೆ?

8.4 ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ:

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಿಮಗೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಹಲವಾರು ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗಿದೆ. ನೀವು ಅವುಗಳ ಅಸ್ತಿತ್ವದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಹಾಗೂ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸೇರಿ ಹೇಗೆ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗುತ್ತವೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಅಭ್ಯಸಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಸಂಖ್ಯಾರೇಖೆಯ ಮೇಲೆ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಗುರುತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ಅವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಸಾಧಿಸಿಲ್ಲ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳು ಎಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, p ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಅದಾಗ $\sqrt{p}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ಈ ಸಾಧನೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸುವ ಪ್ರಮೇಯಗಳಲ್ಲಿ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯವೂ ಒಂದಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆ 's' ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಅದನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ ಹಾಗೂ ಇಲ್ಲಿ $p, q \in Z, q \neq 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ. ನಿಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ ಚಿರಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವ ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110 .... ಇತ್ಯಾದಿ.

$\sqrt{2}$ನ್ನು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸುವ ಮೊದಲು ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯಾಧಾರಿತವಾದ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುವ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.3: ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ p ಯು a^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ, ಆಗ p ಯು a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

***ಸಾಧನೆ:** a ಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿರಲಿ.

$a = p_1 \, p_2 \ldots\ldots p_n$ ಇಲ್ಲಿ $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ಇವು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು ವಿಭಿನ್ನ ಆಗಿರಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

$\therefore \; a^2 = (p_1 \, p_2 \ldots\ldots p_n)(p_1 \, p_2 \ldots\ldots p_n) = p_1^2 \, p_2^2 \ldots. \, p_n^2$

ಈಗ, ದತ್ತದ ಪ್ರಕಾರ p ಯು a^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, p ಯು a^2 ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳಲ್ಲೊಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಅನನ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ a^2 ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ ಇವು ಮಾತ್ರ ಆಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, p ಯು $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ ಇವುಗಳಲ್ಲಿನ ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $a = p_1 \, p_2 \ldots\ldots p_n$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, p ಯು a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸೋಣ.

ಈ ಸಾಧನೆಯು 'ವೈರುಧ್ಯದಿಂದ ಸಾಧನೆ' ಎಂಬ ತಂತ್ರವನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ. (ಈ ತಂತ್ರವನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಅನುಬಂಧ 1ರಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಲಾಗಿದೆ).

ಪ್ರಮೇಯ 8.4: $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದೆ.

ಸಾಧನೆ: ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ, $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ.

$\therefore \sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ಆಗಿರುವಂತೆ r ಮತ್ತು $s \, (\neq 0)$ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

r ಮತ್ತು s ಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು.

$\therefore \; b\sqrt{2} = a$

ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ, ಮರುಜೋಡಿಸಿದಾಗ

*ಪರೀಕ್ಷಾ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದಲ್ಲ

$2b^2 = a^2$ __________ (1)

$\therefore$ 2 ಇದು a^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಈಗ ಪ್ರಮೇಯ 8.3 ರಂತೆ, 2 ಇದು a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $a = 2c$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ c ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1)ರಲ್ಲಿ a ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

$$b^2 = 2c^2$$

ಅಂದರೆ 2 ಇದು b^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 2 ಇದು bನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. (p=2 ಆಗುವಂತೆ ಪ್ರಮೇಯ 8.3ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ) ಆದ್ದರಿಂದ, a ಮತ್ತು bಗಳು ಕನಿಷ್ಠ 2ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆ. a ಮತ್ತು b ಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗೆ ಇದು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ. $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 9: $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ, $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ. ಅಂದರೆ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ಆಗಿರುವಂತೆ a ಮತ್ತು $b (\neq 0)$ ಎಂಬ ಎರಡು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು. a ಮತ್ತು bಗಳು 1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದರೆ, ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನದಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳೆಂದು ಭಾವಿಸೋಣ.

$$\therefore b\sqrt{3} = a$$

ಎರಡೂ ಕಡೆ ವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ, ಮರುಜೋಡಿಸಿದಾಗ,

$3b^2 = a^2$ __________ (1)

$\therefore$ 3 ಇದು a^2 ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.3 ರಂತೆ, 3 ಇದು a ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು $a = 3c$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ c ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

ಸಮೀಕರಣ (1) ರಲ್ಲಿ a ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$$3b^2 = (3c)^2 = 9c^2$$

$$\therefore \quad b^2 = 3c^2$$

ಅಂದರೆ, 3 ಇದು b^2ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, 3 ಇದು b ನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. (p=3 ಆಗುವಂತೆ ಪ್ರಮೇಯ 8.3 ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ)

ಆದ್ದರಿಂದ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಕನಿಷ್ಠ 3ನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆ.

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಎಂಬ ಸತ್ಯಸಂಗತಿಗೆ ಇದು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

$\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ, $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿರುವ ಹಾಗೆ:

- ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತ ಅಥವಾ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು
- ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಕೆಲವು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 10: $5-\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ $5-\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ.

ಅಂದರೆ, $5-\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ಆಗುವಂತೆ a ಮತ್ತು $b\,(\neq 0)$ ಎಂಬ ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

$$\therefore 5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮರುಜೋಡಿಸಿದಾಗ,

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$$

a ಮತ್ತು b ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ $5 - \frac{a}{b}$ ಯು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ $\sqrt{3}$ ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದರೆ $\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಸತ್ಯ ಸಂಗತಿಗೆ ಇದು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

$5-\sqrt{3}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿರೋಧಭಾಸ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $5-\sqrt{3}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 11: $3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಇದಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿ, $3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಊಹಿಸೋಣ.

ಅಂದರೆ, $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ಆಗುವಂತೆ a ಮತ್ತು $b\,(\neq 0)$ ಎಂಬ ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಮರುಜೋಡಿಸಿದಾಗ, $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$

3, a ಮತ್ತು b ಗಳು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $\frac{a}{3b}$ ಯು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ $\sqrt{2}$ ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧವಾಗಿದೆ.

ಆದರೆ $\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ಸತ್ಯ ಸಂಗತಿಗೆ ಇದು ವಿರುದ್ಧವಾಗಿದೆ.

$3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ಊಹೆ ತಪ್ಪಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ವಿರೋಧಾಭಾಸ ಉಂಟಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $3\sqrt{2}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.3

1. $\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
2. $3 + 2\sqrt{5}$ ಒಂದು ಅಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.
3. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

8.5 ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳ ಪುನರಾವಲೋಕನ:

ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ, ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನೇ ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು 9ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಈ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಇದರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಯಾವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲಿದ್ದೇವೆ. ಇದಕ್ಕೋಸ್ಕರ ನಾವು ಹಲವಾರು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ.

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

ಈಗ, (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬರೂ ನಿರೀಕ್ಷಿಸುವಂತೆ, ಅವೆಲ್ಲವುಗಳನ್ನು ಛೇದವು 10ರ ಘಾತವಾಗಿರುವಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಈಗ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಏನಾಗುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡೋಣ.

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$

(ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

ನೀವು ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದಿರಾ? ನಾವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು ಛೇದದ (ಅಂದರೆ q) ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಕೇವಲ 2 ರ ಘಾತ ಅಥವಾ 5ರ ಘಾತ ಅಥವಾ 2 ಮತ್ತು 5 ಇವೆರಡರ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಇರುವುದನ್ನು ಕಾಣಬಹುದು. ನಾವು ಛೇದವು ಈ ರೀತಿ ಆಗಿರುವುದನ್ನೇ ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬೇಕು. ಏಕೆಂದರೆ 10ರ ಘಾತಗಳು ಕೇವಲ 2ರ ಮತ್ತು 5ರ ಘಾತಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿ ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ.

ನಾವು ಕೇವಲ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನಷ್ಟೇ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದರೂ ಸಹ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಛೇದವು 10ರ ಘಾತವಾಗಿರುವಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು. ಅಲ್ಲದೇ 10ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಕೇವಲ 2 ಮತ್ತು 5 ಆಗಿವೆ. ಅದ್ದರಿಂದ, ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳ ನಡುವಿನ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ರದ್ದುಗೊಳಿಸಿದಾಗ ಈ ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು, ಇಲ್ಲಿ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನವು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಈಗ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.5: x ಎಂಬುದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ x ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಸಹ ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.5ರ ವಿಲೋಮವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ತಿಳಿದರೆ ನೀವು ಬಹುಶಃ ಆಶ್ಚರ್ಯಪಡುವಿರಿ. ಅಂದರೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯ ರೂಪವು 2^n5^m ಆಗಿದ್ದು ಮತ್ತು n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿದ್ದಾಗ $\frac{p}{q}$ ಇದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆಯೇ? ಇದು ಏಕೆ ನಿಜವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಕಾರಣವಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವೀಗ ನೋಡೋಣ. $\frac{a}{b}$ ರೂಪದ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ bಯು 10ರ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು,

ಅದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಖಂಡಿತವಾಗಿ ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಛೇದ q ಇದು $2^n 5^m$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ ಅದನ್ನು $\frac{a}{b}$ ರೂಪದ ಸಮಾನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದ bಯು 10 ರ ಘಾತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವಂತೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದು ಅರ್ಥಪೂರ್ಣವಾಗಿರುವಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ. ಈಗ ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಹಿಂದಿರುಗಿ ಹಿಮ್ಮುಖವಾಗಿ ಪರಿಕ್ರಮಿಸೋಣ.

(i) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$

$= \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3}$

$= \frac{375}{10^3}$

$= 0.375$

(ii) $\frac{13}{125} = \frac{13}{5^3}$

$= \frac{13 \times 2^3}{5^3 \times 2^3}$

$= \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3}$

$= \frac{104}{10^3}$

$= 0.104$

(iii) $\frac{7}{80} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

$= \frac{7 \times 5^3}{2^4 \times 5^4}$

$= \frac{875}{10^4}$

$= 0.0875$

(iv) $\frac{233408}{10000} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

$= \frac{2^6 \times 7 \times 521}{2^4 \times 5^4}$

$= \frac{233408}{10^4}$

$= 23.3408$

ಹೀಗೆ, ಈ ಉದಾಹರಣೆಗಳು ನಿಮಗೆ $\frac{p}{q}$ ರೂಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ, ಛೇದ q ಇದು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದಾಗ, ಅದನ್ನು $\frac{a}{b}$ ರೂಪದ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದ bಯು 10ರ ಘಾತಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುವಂತೆ ಹೇಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂತಹ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಮ್ಮ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಬರೆಯೋಣ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.6: $x = \frac{p}{q}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು, n ಮತ್ತು m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಆಗ x ಎಂಬುದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ, ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ, ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸೋಣ. ಪುನಃ ಈಗ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. 9ನೇ ತರಗತಿಯ ಪಠ್ಯಪುಸ್ತಕದ ಮೊದಲನೇ ಅಧ್ಯಾಯದ 5ನೇ ಉದಾಹರಣೆಯಾದ $\frac{1}{7}$ ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷಗಳು 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1...... ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು 7 ಆಗಿದೆ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
7 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30
\end{array}
$$

ಇಲ್ಲಿ ಛೇದ 7ನ್ನು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಇಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಪ್ರಮೇಯ 8.5 ಮತ್ತು 8.6 ರಿಂದ, $\frac{1}{7}$ ಕ್ಕೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಆದ್ದರಿಂದ, ಸೊನ್ನೆಯು ಶೇಷವಾಗಿ ದೊರೆಯುವುದಿಲ್ಲ (ಏಕೆ?) ಮತ್ತು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಹಂತದ ನಂತರ ಶೇಷಗಳು ಪುನರಾವರ್ತಿಸಲು ಆರಂಭವಾಗುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\frac{1}{7}$ ರ ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ 142857 ಈ ಅಂಕಿಗಳ ಸಮೂಹ ಪುನರಾವರ್ತನೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

$\frac{1}{7}$ ರ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ನೋಡಿದ ಫಲಿತಾಂಶವು, ಪ್ರಮೇಯ 8.5 ಮತ್ತು 8.6ರಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತಾಪಿಸದಿರುವ ಯಾವುದೇ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸರಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪ್ರಮೇಯ 8.7: $x = \frac{p}{q}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದೇ n ಮತ್ತು m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಆಗ x ಎಂಬುದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಚರ್ಚೆಯಿಂದ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಪುನರಾವರ್ತನೆ ಆಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

1. ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡದೇ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿವೆಯೇ ತಿಳಿಸಿ:

   (i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$

   (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$

   (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ಪ್ರಶ್ನೆ 1ರಲ್ಲಿನ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

3. ಕೆಲವು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದೆ. ಆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಭಾಗಲಬ್ಧವೇ ಅಥವಾ ಅಲ್ಲವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ. ಅವು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದರೆ, q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ಹೇಳುವಿರಿ?

   (i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000... (iii) $43.\overline{123456789}$

8.6 ಸಾರಾಂಶ:

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿರುವಿರಿ.

1. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯ:

   ದತ್ತ ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದ a ಮತ್ತು b ಗಳಿಗೆ, $a = bq+r$ ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಎಂಬ ಎರಡು ಅನನ್ಯ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿರುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ $0 \leq r < b$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

2. ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಮವಿಧಿ: ಇದು ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ. ಇದರ ಪ್ರಕಾರ, ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು a ಮತ್ತು b $(a>b)$ ಗಳ ಮ.ಸಾ.ಅ ವನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪಡೆಯಬಹುದು.

   ಹಂತ 1: $a = bq+r$ ಆಗುವಂತೆ q ಮತ್ತು r ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಭಾಗಾಕಾರ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ $0 \leq r < b$

   ಹಂತ 2: $r = 0$ ಆದರೆ, ಮ.ಸಾ.ಅ. ವು b ಆಗಿರುತ್ತದೆ. $r \neq 0$ ಆದರೆ, ಯೂಕ್ಲಿಡ್‌ನ ಅನುಪ್ರಮೇಯವನ್ನು b ಮತ್ತು r ಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸಿ.

   ಹಂತ 3: ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗುವವರೆಗೆ ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿನ ಭಾಜಕವೇ ಮ.ಸಾ.ಅ. (a, b) ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಮ.ಸಾ.ಅ. (a, b) = ಮ.ಸಾ.ಅ. (b, r) ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

3. ಅಂಕಗಣಿತದ ಮೂಲ ಪ್ರಮೇಯ:

ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಯುಕ್ತ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು (ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು) ಮತ್ತು ಈ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯು, ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಘಟಿಸುವ ಕ್ರಮವನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಅನನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

4. ಒಂದು ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ p ಯು a^2ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆಗ p ಯು a ಯನ್ನು ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ a ಒಂದು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದೆ.

5. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ಇವು ಅಭಾಗಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಸಾಧಿಸುವುದು.

6. x ಎಂಬುದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ x ನ್ನು $\frac{p}{q}$ ರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ p ಮತ್ತು q ಗಳು ಸಹ – ಅವಿಭಾಜ್ಯಗಳು ಮತ್ತು q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ n, m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾಗಿವೆ.

7. $x = \frac{p}{q}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿದ್ದು, n ಮತ್ತು m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಆಗ x ಎಂಬುದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

8. $x = \frac{p}{q}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. ಇಲ್ಲಿ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2^n5^m ರೂಪದಲ್ಲಿ ಇಲ್ಲದೇ n ಮತ್ತು m ಗಳು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು. ಆಗ x ಎಂಬುದು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

ಓದುಗರಿಗೆ ಸೂಚನೆ

p, q, r ಗಳು ಧನ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಾದಾಗ,

ಮ.ಸಾ.ಅ. (p, q, r) × ಲ.ಸಾ.ಅ. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. (ಉದಾಹರಣೆ 8ನ್ನು ನೋಡಿ) ಆದಾಗ್ಯೂ, p, q, r ಎಂಬ ಮೂರು ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳಿಗೆ ಕೆಳಗಿನ ಫಲಿತಾಂಶವು ಸರಿಹೊಂದುತ್ತದೆ.

$$\text{ಲ.ಸಾ.ಅ.}(p,q,r) = \frac{p.\ q.\ r.\ \text{ಮ.ಸಾ.ಅ}\ (p, q, r)}{\text{ಮ.ಸಾ.ಅ.}\ (p, q).\ \text{ಮ.ಸಾ.ಅ.}\ (q, r).\ \text{ಮ.ಸಾ.ಅ.}\ (p, r)}$$

$$\text{ಮ.ಸಾ.ಅ.}(p,q,r) = \frac{p.\ q\ .r.\ \text{ಲ.ಸಾ.ಅ}\ (p, q, r)}{\text{ಲ.ಸಾ.ಅ.}\ (p, q).\ \text{ಲ.ಸಾ.ಅ.}\ (q, r).\ \text{ಲ.ಸಾ.ಅ.}\ (p, r)}$$

❀ ❀ ❀

ಉತ್ತರಗಳು

ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 1.1

1. i) ಹೌದು. 15, 23, 31 ..... ಇದು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ. ಪ್ರತಿ ಹಿಂದಿನ ಪದಕ್ಕೆ 8 ನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ ಮುಂದಿನ ಪದ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

   ii) ಇಲ್ಲ ಘನಫಲಗಳು $v, \frac{3v}{4}, \left(\frac{3}{4}\right)^2 v$ ......

   iii) ಹೌದು. 150, 200, 250 ..... ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯನ್ನುಂಟು ಮಾಡಿದೆ.

   iv) ಇಲ್ಲ. ಮೊತ್ತಗಳು $10000\left(1 + \frac{8}{100}\right), 10000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^2, 10000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^3$..........

2. i) 10, 20, 30, 40 ii) –2, –2, –2, –2 iii) 4, 1, –2, –5

   iv) $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ v) –1. 25, –1.50, –1.75, –2.0

3. i) $a = 3, d = -2$ ii) $a = -5, d = 4$

   iii) $a = \frac{1}{3}, d = \frac{4}{3}$ iv) $a = 0.6, d = 1.1$

4. i) ಅಲ್ಲ ii) ಹೌದು $d = \frac{1}{2}; 4, \frac{9}{2}, 5$

   iii) ಹೌದು $d = \sqrt{2}; 3 + 4\sqrt{2}, 3 + 5\sqrt{2}, 3 + 6\sqrt{2}$

   vi) ಅಲ್ಲ

   vii) ಹೌದು $d = -4; -16, -20, -24$

   viii) ಹೌದು $d = 0; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

   ix) ಅಲ್ಲ x) ಹೌದು $d = a; 5a, 6a, 7a$

   xi) ಅಲ್ಲ xii) ಹೌದು. $d = \sqrt{2}\ ; \sqrt{50}, \sqrt{72}, \sqrt{98}$

   xiii) ಅಲ್ಲ xiv) ಅಲ್ಲ xv) ಹೌದು $d = 24; 97, 121, 145$

ಅಭ್ಯಾಸ 1.2

1. i) $a_n = 28$ ii) $d = 2$ iii) $a = 46$ iv) $n = 10$

   v) $a_n = 3.5$

2. i) C ii) B

3. i) $\boxed{14}$ ii) $\boxed{18}$, $\boxed{8}$ iii) $\boxed{6\frac{1}{2}}$, $\boxed{8}$

   iv) $\boxed{-2}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ v) $\boxed{53}$, $\boxed{23}$, $\boxed{8}$, $\boxed{-7}$

4. 16ನೇ ಪದ 5. i) 34 ii) 27

6. ಅಲ್ಲ 7. 178 8. 64 9. 5ನೇ ಪದ

10. 1 11. 65ನೇ ಪದ 15. 13 16. 4, 10, 16, 22 ....

17. ಕೊನೆಯ ಪದದಿಂದ 20ನೇ ಪದ 158

18. –13, –8, –319. 11ನೇ ವರ್ಷ 20. 10

ಅಭ್ಯಾಸ 1.3

1. i) 245 ii) –180 iii) 5505 iv) $\frac{33}{20}$

2. i) $1046\frac{1}{2}$ ii) 286 iii) –8930.

3. i) $n = 16$, $S_n = 440$ ii) $d = \frac{1}{3}$; $S_{13} = 273$

   iii) $a = 4$, $S_{12} = 246$ iv) $d = -1$, $a_{10} = 8$

   v) $a = -\frac{35}{3}$, $a_9 = \frac{85}{3}$ vi) $n = 5$, $a_n = 34$

   vii) $n = 6$, $d = \frac{54}{5}$ v) $n = 7$, $a = -8$

   ix) $d = 6$ x) $a = 4$

4. 12, $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $a = 9$, $d = 8$, $S = 636$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ ನಾವು $4n^2 + 5n - 636 = 0$ ವರ್ಗ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $n = -\frac{53}{4}$, 12 ನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಈ ಎರಡು ಮೂಲಗಳಲ್ಲಿ 12 ಸೂಕ್ತವಾಗಿದೆ.

5. $n = 16, a = \frac{8}{3}$ 6. $n = 38$, $S = 6973$

7. ಮೊತ್ತ = 1661 8. $S_{51} = 5610$ 9. n^2

10. i) $S_{15} = 525$, ii) $S_{15} = -465$

11. $S_1 = 3$, $S_2 = 4$, $a_2 = S_2 - S_1 = 1$; $S_3 = 3$, $a_3 = S_3 - S_2 = -1$, $a_{10} = S_{10} - S_9 = -15$, $a_n = S_n - S_{n-1} = 5 - 2n$

12. 4920 13. 960 14. 625 15. ₹ 27750

16. ಬಹುಮಾನಗಳ ಮೌಲ್ಯಗಳು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40.

17. 234 18. 143cm 19. 16 ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳು; ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ 5 ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಗಳನ್ನು ಇಡಲಾಗಿದೆ. $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ಈ ಸೂತ್ರದಲ್ಲಿ $S = 200$, $a = 20$ $d = -1$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ $41n - n^2 = 400$ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಇದನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಾಗ $n = 16, 25$ ಆದ್ದರಿಂದ ಅಡ್ಡ ಸಾಲುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯು 16 ಅಥವಾ 25

$a_{25} = a + 24d = -4$ ಅಂದರೆ 25ನೇ ಅಡ್ಡ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ -4 ಇದು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ $n = 25$ ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. $n = 16$ ಆದಾಗ $a_{16} = 5$. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಲ್ಲಿ 16 ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳಿದ್ದು ಅತ್ಯಂತ ಮೇಲಿನ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿರುವ ಮರದ ದಿಮ್ಮಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 5 ಆಗಿದೆ.

20. 370m

ಅಭ್ಯಾಸ 1.4 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. 32ನೇ ಪದ 2. $S_{16} = 2076$ 3. 385cm

4. 35 5. $750m^2$

ತ್ರಿಭುಜಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. i) ಸಮರೂಪ ii) ಸಮರೂಪ iii) ಸಮಬಾಹು

iv) ಸಮ, ಸಮಾನುಪಾತದಲ್ಲಿದೆ. 3) ಅಲ್ಲ

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. i) 2cm ii) 2.4cm

2. i) ಅಲ್ಲ ii) ಹೌದು iii) ಹೌದು

9. 'O' ಮೂಲಕ AD ಮತ್ತು BC ಗಳನ್ನು E ಮತ್ತು F ಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುವಂತೆ DC ಗೆ ಸಮಾನಾಂತರವಾಗಿ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆಯಿರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. i) ಹೌದು, AAA, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

   ii) ಹೌದು, SSS, $\Delta ABC \sim \Delta QRP$

   iii) ಅಲ್ಲ

   iv) ಹೌದು, SAS, $\Delta MNL \sim \Delta QPR$

   v) ಅಲ್ಲ

   vi) ಹೌದು, AA, $\Delta DEF \sim \Delta PQR$

2. 55°, 55°, 55°

14. AD = DE ಆಗುವಂತೆ AD ಯನ್ನು E ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ಮತ್ತು PM = MN ಆಗುವಂತೆ PM ನ್ನು N ಬಿಂದುವಿನವರೆಗೆ ವೃದ್ಧಿಸಿ.

15. 42m

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. 11.2cm 2. 4 : 1 5. 1 : 4

8. C 9. D

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. i) ಹೌದು, 25cm ii) ಅಲ್ಲ iii) ಅಲ್ಲ iv) ಹೌದು. 13cm

6. $a\sqrt{3}$ 9. 6m 10. $6\sqrt{7}$m 11. $300\sqrt{61}$ km

12. 13m 17. C

ಅಭ್ಯಾಸ 2.6 (ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. QP ಯ ವೃದ್ಧಿಸಿದ ಭಾಗವನ್ನು T ನಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸುವಂತೆ R ಮುಖಾಂತರ SP ಗೆ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಸರಳರೇಖೆ ಎಳೆಯಿರಿ. PT = PR ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

6. ಈ ಅಭ್ಯಾಸದ ಪ್ರಶ್ನೆ (iii) ರ 5ನೇ ಪ್ರಶ್ನೆಯ ಫಲಿತಾಂಶ ಉಪಯೋಗಿಸಿರಿ.

7. 3m 9. 2.79m

ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿರುವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಜೋಡಿಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 3.1

1. ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ಹೀಗೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು :

   $x-7y+42=0$, $x-3y-6=0$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಅಫ್ತಾಬ್ ಮತ್ತು ಅವರ ಮಗಳ ಈಗಿನ ಪ್ರಾಯಗಳು. ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಕ್ಷೆಯ ಮೂಲಕ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ನೀವು ಈ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

2. ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ, ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು :

   $x+2y=1300$; $x+3y=1300$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಬ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಬಾಲ್‌ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ). ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು, ನೀವು ಈ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

3. ಬೀಜಗಣಿತೀಯವಾಗಿ, ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು :

   $2x+y=160$; $4x+2y=300$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸೇಬು ಮತ್ತು ದ್ರಾಕ್ಷಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳು (ಪ್ರತಿ kg ಗೆ ₹ ಗಳಲ್ಲಿ). ಈ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ನಕ್ಷಾರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು, ನೀವು ಈ ಎರಡು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.2

1. (i) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಜೋಡಿಯು, $x+y=10$; $x-y=4$; ಇಲ್ಲಿ x ಎಂದರೆ ಹುಡುಗಿಯರ ಸಂಖ್ಯೆ, y ಎಂದರೆ ಹುಡುಗರ ಸಂಖ್ಯೆ. ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು, ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಒಂದೇ ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ರಚಿಸಬೇಕು.

   ಹುಡುಗಿಯರು = 7 ; ಹುಡುಗರು = 3.

   (ii) ರೇಖಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ಜೋಡಿಯು, $5x+7y=50$; $7x+5y=46$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲು ಮತ್ತು ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆಗಳು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ನಕ್ಷಾಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬಿಡಿಸಲು, ಗ್ರಾಫ್ ಹಾಳೆಯ ಒಂದೇ ಅಕ್ಷಗಳಲ್ಲಿ ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ನಕ್ಷೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬೇಕು.

   ಒಂದು ಪೆನ್ಸಿಲಿನ ಬೆಲೆ = ₹ 3, ಒಂದು ಪೆನ್ನಿನ ಬೆಲೆ = ₹ 5.

2. (i) ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತವೆ. (ii) ಐಕ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. (iii) ಸಮಾಂತರ

3 (i) ಸ್ಥಿರ (i) ಅಸ್ಥಿರ (iii) ಸ್ಥಿರ (iv) ಸ್ಥಿರ (v) ಸ್ಥಿರ

4. (i) ಸ್ಥಿರ (i) ಅಸ್ಥಿರ (iii) ಸ್ಥಿರ (iv) ಅಸ್ಥಿರ

   ಮೇಲಿನ (i)ರ ಪರಿಹಾರವು $y = 5-x$, ಇಲ್ಲಿ x ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು.

ಅಂದರೆ, ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ. ಮೇಲಿನ (iii)ರ ಪರಿಹಾರವು $x = 2,\ y = 2$. ಅಂದರೆ ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ.

5. ಉದ್ದ = $20m$ ಮತ್ತು ಅಗಲ = $16m$.

6. ಮೂರು ಭಾಗಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಪರಿಹಾರವು.

   (i) $3x+2y-7=0$ (ii) $2x+3y-12=0$ (iii) $4x+6y-16=0$

7. ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳು (–1,0), (4,0) ಮತ್ತು (2,3) ಆಗಿವೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.3

1. (i) $x = 9, y = 5$. (ii) $s = 9, t = 6$. (iii) $y = 3x - 3$, ಇಲ್ಲಿ x ಗೆ ಯಾವುದೇ ಬೆಲೆಯನ್ನು ನೀಡಬಹುದು. ಅಂದರೆ, ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳಿವೆ.

   (iv) $x = 2, y = 3$. (v) $x = 0, y = 0$. (vi) $x = 2, y = 3$.

2. $x = -2, y = 5$. $m = -1$.

3. (i) $x - y = 26$, $x = 3y$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು $(x > y)$; $x = 39, y = 13$.

   (ii) $x - y = 18$, $x + y = 180$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಡಿಗ್ರಿಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಕೋನಗಳ ಅಳತೆಗಳು; $x = 99, y = 81$.

   (iii) $7x + 6y = 3800$, $3x + 5y = 1750$, ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಂದು ಬ್ಯಾಟ್ ಮತ್ತು ಒಂದು ಚೆಂಡಿನ ಬೆಲೆಗಳು (₹ ಗಳಲ್ಲಿ); $x = 500, y = 50$.

   (iv) $x + 10y = 105$, $x + 15y = 155$, ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ನಿಗದಿತ ಮೊತ್ತ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು y ಯು ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತ (ಪ್ರತಿ ಕಿಲೋ ಮೀಟರ್‌ಗೆ, ₹ ಗಳಲ್ಲಿ); $x = 5$, $y = 10$; ₹ 255.

   (v) $11x - 9y + 4 = 0$, $6x - 5y + 3 = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು; $\frac{7}{9}$ $(x = 7, y = 9)$.

   (vi) $x - 3y - 10 = 0$, $x - 7y + 30 = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಜೇಕಬ್ ಮತ್ತು ಅವರ ಮಗನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ); $x = 40, y = 10$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.4

1. (i) $x = \frac{19}{5}, y = \frac{6}{5}$. (ii) $x = 9, y = 1$. (iii) $x = \frac{9}{13}, y = \frac{-5}{13}$.

   (iv) $x = 2, y = -3$.

2. (i) $x - y + 2 = 0$, $2x - y - 1 = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು

ಛೇದಗಳು; $\frac{3}{5}$

(ii) $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ನೂರಿ ಮತ್ತು ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸು (ವರ್ಷಗಳಲ್ಲಿ). ನೂರಿಯ ವಯಸ್ಸು (x) = 50, ಸೋನುವಿನ ವಯಸ್ಸು (y) = 20.

(iii) $x + y = 9$, $8x - y = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಹತ್ತರ ಮತ್ತು ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿರುವ ಅಂಕೆಗಳು ; 18.

(iv) $x + 2y = 40$, $x + y = 25$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ₹ 50 ಮತ್ತು ₹ 100 ರ ನೋಟುಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು, $x = 10$, $y = 15$.

(v) $x + 4y = 27$, $x + 2y = 21$. ಇಲ್ಲಿ x ನಿಗದಿತ ಮೊತ್ತ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು y ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಮೊತ್ತ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ), ಪ್ರತಿ ದಿನಕ್ಕೆ; $x = 15$, $y = 3$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.5

1. (i) ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ. (ii) ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ; $x = 2$, $y = 1$.

   (iii) ಅಪರಿಮಿತ ಪರಿಹಾರಗಳು (iv) ಅನನ್ಯ ಪರಿಹಾರ; $x = 4$, $y = -1$.

2. (i) $a = 5$, $b = 1$. (ii) $k = 2$,

3. $x = -2$, $y = 5$.

4. (i) $x + 20y = 1000$, $x + 26y = 1180$. ಇಲ್ಲಿ x ಎಂಬುದು ಪ್ರತಿದಿನದ ಆಹಾರಕ್ಕೆ ನಿಗದಿತ ಮೊತ್ತ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ), ಮತ್ತು y ಪಾವತಿಸಬೇಕಾದ ಮೊತ್ತ (₹ ಗಳಲ್ಲಿ); $x = 400$, $y = 30$.

   (ii) $3x - y - 3 = 0$, $4x - y - 8 = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಅಂಶ ಮತ್ತು ಛೇದಗಳು; $\frac{5}{12}$

   (iii) $3x - y = 40$, $2x - y = 25$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಸರಿಯುತ್ತರಗಳು ಮತ್ತು ತಪ್ಪು ಉತ್ತರಗಳು; 20

   (iv) $u - v = 20$, $u + v = 100$, ಇಲ್ಲಿ u ಮತ್ತು v ಗಳು ಎರಡು ಕಾರುಗಳ ಜವಗಳು (km/h ಗಳಲ್ಲಿ); $u = 60$, $v = 40$.

   (v) $3x - 5y - 6 = 0$, $2x + 3y - 61 = 0$. ಇಲ್ಲಿ x ಮತ್ತು y ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆಯತದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳು (ಮಾನಗಳಲ್ಲಿ); ಉದ್ದ (x)= 17, ಅಗಲ (y)= 9.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.6

1. (i) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$. (ii) $x = 4, y = 9$. (iii) $x = \frac{1}{5}, y = -2$.
   (iv) $x = 4, y = 5$. (v) $x = 1, y = 1$. (vi) $x = 1, y = 2$.
   (vii) $x = 3, y = 2$. (viii) $x = 1, y = 1$.

2. (i) $u + v = 10, u - v = 2$, ಇಲ್ಲಿ u ಮತ್ತು v ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ದೋಣಿ ಮತ್ತು ಪ್ರವಾಹಗಳ ಜವಗಳು (km/h ಗಳಲ್ಲಿ); $u = 6, v = 4$.

   (ii) $\frac{2}{n} + \frac{5}{m} = \frac{1}{4}$, $\frac{3}{n} + \frac{6}{m} = \frac{1}{3}$, ಇಲ್ಲಿ n ಮತ್ತು m ಗಳು ಒಂದು ಹೆಂಗಸು ಮತ್ತು ಒಂದು ಗಂಡಸು ಕಸೂತಿ ಕೆಲಸವನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ದಿನಗಳು; $n = 18$, $m = 36$.

   (iii) $\frac{60}{u} + \frac{240}{v} = 4$, $\frac{100}{u} + \frac{200}{v} = \frac{25}{6}$, ಇಲ್ಲಿ u ಮತ್ತು v ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ ರೈಲು ಮತ್ತು ಬಸ್ಸುಗಳ ಜವಗಳು (km/h ಗಳಲ್ಲಿ); $u = 60, v = 80$.

ಅಭ್ಯಾಸ 3.7 (ಐಚ್ಛಿಕ)

1. ಅನಿಯ ವಯಸ್ಸು 19 ವರ್ಷ ಮತ್ತು ಬಿಜುವಿನ ವಯಸ್ಸು 16 ವರ್ಷ ಅಥವಾ ಅನಿಯ ವಯಸ್ಸು 21 ವರ್ಷ ಮತ್ತು ಬಿಜುವಿನ ವಯಸ್ಸು 24 ವರ್ಷ.

2. ₹ 40, ₹ 170 ಮೊದಲನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣ x (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಮತ್ತು ಎರಡನೇ ವ್ಯಕ್ತಿಯಲ್ಲಿರುವ ಹಣ y (₹ ಗಳಲ್ಲಿ) ಆಗಿರಲಿ.

   $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$

3. $600\,km$ 4. 36

5. $\angle A = 20^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 120^0$

6. ತ್ರಿಭುಜದ ಶೃಂಗಗಳ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು (1,0), (0, –3), (0, –5) ಆಗಿವೆ.

7. (i) $x = 1, y = -1$. (ii) $x = \frac{c(a-b)-b}{a^2 - b^2}$ $y = \frac{c(a-b)+a}{a^2 - b^2}$
   (iii) $x = a, y = b$. (iv) $x = a + b, y = -\frac{2ab}{a+b}$ (v) $x = 2, y = 1$.

8. $\angle A = 120^0$, $\angle B = 70^0$, $\angle C = 60^0$, $\angle D = 110^0$

ವೃತ್ತಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 4.1

1. ಅಪರಿಮಿತ
2. i) ಒಂದು ii) ಛೇದಕ
   iii) ಅಪರಿಮಿತ iv) ಸ್ಪರ್ಶ ಬಿಂದು
3. D

ಅಭ್ಯಾಸ 4.2

1. A 2. B 3. A 6. 3 cm 7. 7.8 cm

12. AB = 15 cm, AC = 13 cm,

ವೃತ್ತಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 5.1

1. 28 cm 2. 10 cm
3. ಬಂಗಾರ : 346.5 cm^2 ; ಕೆಂಪು : 1039.5 cm^2
   ನೀಲಿ : 1732.5 cm^2 ; ಕಪ್ಪು : 2425.5 cm^2
   ಬಿಳಿ : 3118.5 cm^2
4. 4375 5. A

ಅಭ್ಯಾಸ 5.2

1. $\frac{132}{7}$ cm^2 2. $\frac{77}{8}$ cm^2 3. $\frac{154}{3}$ cm^2
4. i) 28.5 cm^2 ii) 235.5 cm^2
5. i) 22 cm ii) 231 cm^2 iii) $\left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right)$ cm^2
6. 20.4375 cm^2 ; 686.0625 cm^2 7. 88.44 cm^2
8. i) 19.625 cm^2 ii) 58.875 cm^2

9. i) 285 mm ii) $\frac{385}{4}$ mm^2

10. i) $\frac{22275}{28}$ cm^2 11. $\frac{158125}{126}$ cm^2 12. 189.97 km^2

13. ₹ 162.68 14. D

ಅಭ್ಯಾಸ 5.3

1. $\frac{4523}{28}$ cm^2 2. $\frac{154}{3}$ cm^2 3. 42 cm^2

4. $\left(\frac{660}{7} + 36\sqrt{3}\right)$ cm^2 5. $\frac{68}{7}$ cm^2 6. $\left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right)$cm^2

7. 42 cm^2 8. i) $\frac{2804}{7}$ m ii) 4320 m^2

9. 66.5 cm^2 10. 1620.5 cm^2 11. 378 cm^2

12. i) $\frac{77}{8}$ cm^2 ii) $\frac{49}{8}$ cm^2

13. 228 cm^2 14. $\frac{308}{3}$ cm^2 15. 98 cm^2

16. $\frac{256}{7}$ cm^2

ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ರೇಖಾಗಣಿತ

ಅಭ್ಯಾಸ 7.1

1. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) $2\sqrt{a^2 + b^2}$
2. 39; 39 *km* 3. ಅಲ್ಲ.
4. ಹೌದು. 5. ಚಂಪಾಳು ಸರಿ.
6. (i) ಚೌಕ. (ii) ಯಾವುದೇ ಚತುರ್ಭುಜವಿಲ್ಲ. (iii) ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ
7. $(-7, 0)$ 8. $-9, 3$
9. ± 4, QR = $\sqrt{41}$, PR = $\sqrt{82}$, $9\sqrt{2}$ 10. $3x + y - 5 = 0$.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.2

1. (1,3) 2. $(2, -\frac{5}{3})$; $(0, -\frac{7}{3})$
3. $\sqrt{61}\,m$, 5ನೇ ಗೆರೆಯು 22.5 m ದೂರದಲ್ಲಿ 4. 2:7

5. 1:1; $(-\frac{3}{2}, 0)$ 6. $x = 6, y = 3$ 7. (3, –10).

8. $(\frac{-2}{7}, -\frac{20}{7})$ 9. $(-1, \frac{7}{2})$, (0,5), $(1, \frac{13}{2})$ 10. 24 ಚ.ಮಾನಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.3

1. (i) $\frac{21}{2}$ ಚ.ಮಾನಗಳು. (ii) 32 ಚ.ಮಾನಗಳು.
2. (i) K = 4 (ii) K = 3
3. 1 ಚ.ಮಾನಗಳು; 1:4 4. 28 ಚ.ಮಾನಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 7.4(ಐಚ್ಛಿಕ)*

1. 2:9 2. $x + 3y - 7 = 0$
3. (3, –2) 4. (1,0), (1,4)
5. (i) (4,6), (3,2), (6,5), AD ಮತ್ತು AB ಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ.
(ii) (12,2), (13,6), (10,3); CB ಮತ್ತು CD ಗಳನ್ನು ನಿರ್ದೇಶಾಂಕ ಅಕ್ಷಗಳಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $\frac{9}{2}$ ಚ.ಮಾನಗಳು, $\frac{9}{2}$ ಚ.ಮಾನಗಳು. ಎರಡೂ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳು ಸಮಾನ.
6. $\frac{15}{32}$ ಚ.ಮಾನಗಳು; 1:16.
7. (i) $D(\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$ (ii) $P(\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$
(iii) $Q(\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$, $R(\frac{11}{3}, \frac{11}{3})$ (iv) P,Q,R ಗಳು ಒಂದೇ ಬಿಂದು.
(v) $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ 8. ವಜ್ರಾಕೃತಿ

ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು

ಅಭ್ಯಾಸ 8.1

1. (i) 45 (ii) 196 (iii) 51
2. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವು 6q, 6q + 1, 6q + 2, 6q + 3, 6q + 4 ಅಥವಾ 6q + 5 ರೂಪದಲ್ಲಿರಬಹುದು.
3. 8 ಕಂಬಸಾಲುಗಳು
4. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವು 3q, 3q + 1 ಅಥವಾ 3q + 2 ರೂಪದಲ್ಲಿರಬಹುದು. ಈ ಎಲ್ಲ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣವರ್ಗಗೊಳಿಸಿ.
5. ಒಂದು ಪೂರ್ಣಾಂಕವು 9q, 9q + 1, 9q + 2, 9q + 3.... ಅಥವಾ 9q + 8 ರೂಪದಲ್ಲಿರಬಹುದು.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.2

1. (i) $2^2 \times 5 \times 7$ (ii) $2^2 \times 3 \times 13$ (iii) $3^2 \times 5^2 \times 17$

   (iv) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (v) $17 \times 19 \times 23$

2. (i) ಲ.ಸಾ.ಅ. = 182; ಮ.ಸಾ.ಅ. = 13

   (ii)ಲ.ಸಾ.ಅ. = 23460; ಮ.ಸಾ.ಅ. = 2

   (iii) ಲ.ಸಾ.ಅ. = 3024; ಮ.ಸಾ.ಅ. = 6

3. (i) ಲ.ಸಾ.ಅ. = 420; ಮ.ಸಾ.ಅ. = 3

   (ii)ಲ.ಸಾ.ಅ. = 11339; ಮ.ಸಾ.ಅ. = 1

   (iii) ಲ.ಸಾ.ಅ. = 1800; ಮ.ಸಾ.ಅ. = 1

4. 22338

5. 36 ನಿಮಿಷಗಳು.

ಅಭ್ಯಾಸ 8.4

1. (i) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ (ii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ

   (iii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ (iv) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ

   (v) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ (vi) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ

   (vii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ (viii) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ

   (ix) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ (x) ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದೇ ಆವರ್ತವಾಗುವ

2. (i) 0.00416 (ii) 2.125 (iv) 0.009375

   (vi) 0.115 (viii) 0.4 (ix) 0.7

3. (i) ಭಾಗಲಬ್ಧ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಕೇವಲ 2 ಅಥವಾ 5 ಅಥವಾ ಇವೆರಡೂ ಆಗಿರುತ್ತವೆ.

   (ii) ಭಾಗಲಬ್ಧ ಅಲ್ಲ

   (iii) ಭಾಗಲಬ್ಧ q ದ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2 ಅಥವಾ 5 ಮಾತ್ರವಲ್ಲದೇ ಬೇರೆ ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ.